Catégories sans ensemble d'objets, n-ordres, constructivisme

Mathieu Dupont

2008

(Ce texte devait être un avertissement au début de ma thèse de doctorat [9], intitulé "Avertissement concernant le cadre de ce travail" mais je l'ai finalement enlevé.)

Le but de cet "avertissement" est d'expliquer dans quel cadre a été pensé et réalisé ce travail. Ce cadre se reflète dans les notations, la terminologie, ainsi que dans certaines directions qui ont été prises.

1 Ensembles

La théorie de Zermelo-Fraenkel est souvent présentée comme une théorie dans laquelle il est possible de développer les mathématiques. Mais cette théorie ZF a deux défauts principaux : d'une part, les mathématiques ne sont pas formalisées directement dans ZF, on doit les y *encoder* à la main d'une manière plus ou moins arbitraire et, d'autre part, à cause de cet encodage, cette théorie permet l'expression de propriétés sans signification mathématique, comme

- $1 \in 2$,
- $\cos \in \pi$, ou
- $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N}) = (1, 2)$.

Ce deuxième problème est dû au fait que les mathématiques sont *typées* (c'est-à-dire que les fonctions et relations mathématiques ordinaires sont chacune définies pour des objets mathématiques d'un certain type, et que leur application à des objets d'un autre type n'a pas de sens), alors que ZF est une théorie non typée.

C'est pourquoi ce travail n'est pas développé dans ZF, mais dans une théorie de types (qui pourrait ressembler à la théorie intuitionniste des types de Martin-Löf [18] ou au Calcul des Constructions [8]). On pensera un *type* comme une simple collection d'objets, sans aucune structure, pas même une relation d'égalité entre les objets. C'est ce qu'Errett Bishop appelle un préensemble ("preset", [7]).

Pour décrire un type, il suffit de décrire les données qui déterminent un objet de ce type.

On notera "$x\colon A$" pour déclarer qu'une variable x est de type A (on utilisera aussi cette notation dans les quantifications, par exemple : $\forall x\colon A.\, P(x)$). On réservera le symbole $\in$ pour représenter la relation d'appartenance entre éléments d'un ensemble A et sous-ensembles de A, ou entre objets d'une catégorie $\mathbb{A}$ et sous-catégories pleines de $\mathbb{A}$.

On définit alors un ensemble comme un type muni d'une relation d'égalité.

1 Définition. Un *ensemble* est un type A muni, pour tous objets $a, b\colon A$, d'une valeur de vérité $a = b$, tel que, pour tous $a, b, c\colon A$,

1. $\top \leq (a = a)$;
2. $(a = b) \wedge (b = c) \leq (a = c)$;
3. $(a = b) \leq (b = a)$.

C'est la définition d'ensemble qu'utilise Errett Bishop en mathématiques constructives [7]. Elle est également souvent utilisée pour la formalisation des mathématiques dans les assistants de preuve (parfois sous le nom de "setoid") ; par exemple dans [1], [19] et [11]. Il s'agit essentiellement des ensembles abstraits au sens de Lawvere [13, 14], qui sont les objets de la catégorie des ensembles.

Plus généralement, on peut définir un *ordre* comme un type A muni d'une telle structure, sans la condition 3 (on note alors $a \leq b$ plutôt que $a = b$). Il ne peut être question d'antisymétrie, car il n'y a pas d'égalité préexistante permettant de l'exprimer. Par contre, on peut définir une égalité sur l'ordre A *a posteriori*, en définissant $a = b$ par la condition : $a \leq b$ et $b \leq a$.

Une règle associant à chaque élément x d'un type A un élément $f(x)$ d'un type B sera appelée une *opération* (au sens de Bishop [7]). Une fonction est une opération qui préserve l'égalité. C'est la définition qu'utilisent Bishop et les formalisations des mathématiques citées ci-dessus.

2 Définition. Soit A et B des ensembles. Une *fonction* $f\colon A \to B$ est la donnée, pour chaque objet $a\colon A$, d'un objet $f(a)\colon B$ de telle façon que, si $a = b$, alors $f(a) = f(b)$.

Les fonctions de A vers B forment un ensemble $\mathsf{Ens}(A, B)$, l'égalité étant définie point par point : $f = g$ si, pour tout $a\colon A$, $f(a) = g(a)$. Pour chaque ensemble A, il y a une fonction identité $1_A\colon A \to A$ et, si l'on a des fonctions $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, il y a une fonction composée $A \xrightarrow{gf} B$, définie de façon usuelle.

Le quotient d'un ensemble A par une relation d'équivalence R peut être décrit très simplement : c'est l'ensemble qui a les mêmes objets que A et dont l'égalité est R. C'est le même principe que pour les quotients de catégories : quand on quotiente une catégorie, on garde les mêmes objets et on ajoute des isomorphismes (ou, plus généralement, des flèches) pour identifier les objets ; dans le cas des ensembles, pour identifier deux éléments, on ajoute une égalité entre ces éléments. Il n'est pas nécessaire de passer par des classes d'équivalence, ce qui évite de devoir faire des choix arbitraires d'un représentant d'une classe d'équivalence, et est plus proche de la pratique mathématique ordinaire avec les nombres rationnels ou les nombres entiers modulo n.

2 Constructivisme et axiome du choix

Les développements de ce travail se feront de façon constructive. En particulier, l'affirmation de l'existence d'un objet ayant une certaine propriété signifiera que l'on a une construction effective d'un objet ayant cette propriété. L'affirmation de $\forall x\colon A.\, \exists y\colon B.\, P(x, y)$ signifie que l'on dispose d'une règle f associant à chaque objet x de type A un objet $f(x)$ de type B tel que $P(x, f(x))$; on dispose donc d'une opération $f\colon A \to B$.

Par exemple, on dit qu'une fonction $f\colon A \to B$ est une *surjection* si, pour tout $b\colon B$, il existe $a\colon A$ tel que $f(a) = b$. Cela signifie que l'on dispose d'une opération $g\colon B \to A$ telle que, pour tout $b\colon B$, $f(g(b)) = b$. En général, il n'y a aucune raison de supposer que cette opération g préserve l'égalité, c'est-à-dire que g est une fonction. C'est pourquoi on ne supposera pas que l'axiome du choix est vrai pour les ensembles. Par contre, on peut démontrer facilement l'*axiome de choix unique*, sous la forme suivante.

3 Proposition. *Toute bijection (fonction surjective et injective) $A \to B$ est inversible.*

Démonstration. Soit $f\colon A \to B$ une bijection. On a donc une opération $g\colon B \to A$ telle que pour tout $b\colon B$, $fg(b) = b$. Alors g est une fonction (préserve l'égalité) : si $b = b'$ dans B, $fgb = b = b' = fgb'$ et donc, par injectivité de f, $gb = gb'$. Il ne reste plus qu'à démontrer que cette fonction est un inverse de f. On sait déjà que $fg = 1_B$. De plus, $gf = 1_A$ car, pour tout $a\colon A$, $fgfa = fa$ et, comme f est injective, $gfa = a$. □

3 Catégories

On ne peut pas définir une égalité entre ensembles en comparant les éléments de ces ensembles, car l'égalité est définie seulement entre éléments d'un même ensembles. Le type de tous les ensembles n'a donc pas une structure naturelle d'ensemble. Par contre, ce type est une catégorie. La structure de catégorie est une structure similaire à celle d'ensemble, ou plutôt d'ordre, comme l'a remarqué Lawvere [12].

4 Définition. Une *catégorie* est un type $\mathbb{A}$ muni des données suivantes :

1. pour tous objets $A, B : \mathbb{A}$, un ensemble $\mathbb{A}(A, B)$ (noté aussi $A \to B$) ;
2. pour tout objet $A : \mathbb{A}$, un objet $1_A : A \to A$;
3. pour tous objets $A, B, C : \mathbb{A}$, une fonction comp: $\mathbb{A}(A, B) \times \mathbb{A}(B, C) \to \mathbb{A}(A, C)$, qui envoie $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ sur $g \circ f : A \to C$.

Ces données doivent satisfaire les conditions suivantes :

1. $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$;
2. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

La différence essentielle avec la définition usuelle de catégorie est que l'on ne suppose pas que le type des objets d'une catégorie ait, en plus de la structure proprement catégorielle, une structure d'ensemble (c'est-à-dire une égalité au niveau des objets). Il est en effet naturel de considérer ces structures d'abord séparément avant de les combiner.

Un des principes généraux de la théorie des catégories usuelle est que l'on devrait éviter de parler d'égalité entre objets, le vrai critère d'identité des objets d'une catégorie étant l'isomorphisme. Il est donc naturel de tenir compte de ce principe dans la définition même de catégorie en rendant tout simplement impossible l'expression d'une telle égalité.

Ce point de vue a été défendu par Mihaly Makkai, dans les premières sections de l'article *Towards a categorical foundation of mathematics* [16], et soutenu par Jean-Pierre Marquis [17]. La possibilité de considérer des catégories sans égalité au niveau des objets a également été envisagée, dans un contexte différent, par Jean Bénabou [6]. En mathématiques constructives, cela est commun : Roger Apéry [2] considérait déjà que l'égalité entre objets d'une catégorie n'a pas de sens, et les formalisations de la théorie des catégories en théorie des types ne contiennent en général pas d'égalité au niveau des objets [1], [19], [11].

Un avantage de ne pas demander d'égalité entre objets est que les ensembles forment une catégorie, sans limitation sur la taille des ensembles, puisque les objets de la catégorie ne doivent pas former eux-mêmes un ensemble. De plus, le théorème de Freyd ([10, Exercice 3.D]) affirmant qu'une catégorie "complètement" complète est forcément un ordre ne s'appliquera pas, car il utilise l'ensemble des flèches, dont on ne dispose pas pour la notion plus générale de catégorie définie ci-dessus. On devra malgré tout introduire d'une façon ou d'une autre une limitation sur les constructions possibles car, si l'on avait à la fois l'existence d'un foncteur ensemble des parties covariant $\mathcal{P} : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ et l'existence de toutes les colimites dans Ens, on pourrait démontrer (par une version catégorielle du théorème de Knaster-Tarski) que ce foncteur $\mathcal{P}$ a un point fixe, ce qui est impossible par le théorème de Cantor. Comme dans ce travail on ne s'approchera pas des zones critiques, on ne décidera pas d'une limitation.

Les ensembles peuvent être vus comme des catégories. Un avantage des définitions employées ici est que si une catégorie est équivalente à un ensemble, elle est un ensemble ; la notion d'ensemble est donc bien catégorielle, dans le sens "invariante sous équivalence".

Les foncteurs $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ sont les opérations qui préservent la structure de catégorie (tout comme les fonctions sont les opérations qui préservent la structure d'ensemble, c'est-à-dire l'égalité). On dira qu'un foncteur $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est *surjectif* si, pour tout $B\colon \mathbb{B}$ il existe un objet $G(B)\colon \mathbb{A}$ et un isomorphisme $\varphi_B\colon FGB \to B$. Comme pour les fonctions surjectives, une opération $G\colon \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ est donnée explicitement, par constructivité. On peut alors démontrer un *axiome de choix unique* pour les catégories.

5 Proposition. *Tout foncteur plein fidèle et surjectif est une équivalence.*

Démonstration. En partant de la définition de foncteur surjectif donnée ci-dessus, il suffit de démontrer que l'opération G est un foncteur : on doit définir son action sur les flèches. Soit $B, B'\colon \mathbb{B}$; on pose $G_{B,B'} :=$

$$\mathbb{B}(B, B') \xrightarrow{\varphi_{B'}^{-1} \circ - \circ \varphi_B} \mathbb{B}(FGB, FGB') \xrightarrow{F^{-1}_{GB,GB'}} \mathbb{A}(GB, GB'), \tag{1}$$

où $F^{-1}_{GB,GB'}$ est donné par la proposition 3 appliquée à $F_{GB,GB'}$ (qui est injectif par la fidélité et surjectif par la plénitude de F). Il est facile de vérifier que cela définit un foncteur qui forme avec F une équivalence. $\square$

4 Catégories avec un ensemble d'objet

Le rôle joué en théorie des catégories standard par la distinction quantitative entre petites et grandes catégories est joué ici par la distinction qualitative entre catégories avec ou sans ensemble d'objets. La catégorie des ensembles est un exemple de catégorie sans ensemble d'objets (une "grande" catégorie).

Certains résultats, qui utilisent explicitement ou implicitement une égalité au niveau des objets, se verront limités au cas des catégories munies d'un ensemble d'objet. Par exemple, la caractérisation des limites en termes de produits et d'égalisateurs n'a de sens que pour les limites d'un foncteur dont le domaine a un ensemble d'objets (et donc de flèches), car elle s'obtient par des produits indexés par l'ensemble des objets et l'ensemble des flèches de ce domaine.

La plupart des travaux concernant les groupoïdes et les catégories enrichies dans les groupoïdes concernent les groupoïdes internes à Ens, qui forment une catégories $\mathsf{Gpd}(\mathsf{Ens})$. Comme dans ce travail on veut étudier la 2-catégorie des groupoïdes, on devra travailler avec des groupoïdes non équipés d'un ensemble d'objets, de manière à éviter l'axiome du choix. On aurait pu travailler avec les anafoncteurs internes et anatransformations naturelles [15, 4], mais il est plus simple de travailler directement avec les groupoïdes quelconques.

5 n-catégories et cohérence

On a remarqué que les ensembles ne forment pas un ensemble, mais une catégorie. De même, les catégories ne forment pas une catégorie (ce qui nécessiterait une égalité entre foncteurs et donc une égalité entre objets des catégories), mais une 2-catégorie (voir à nouveau [16] et [17]). De même, les 2-catégories ne forment pas une 2-catégorie, mais une 3-catégorie et ainsi de suite.

En apparence, les catégories forment une catégorie : l'associativité de la composition des foncteurs est "stricte" : si l'on calcule $((F \circ G) \circ H)(C)$ ou $(F \circ (G \circ H)(C)$, on obtient dans les deux cas $F(G(H(C))$. Mais en l'absence d'une égalité au niveau des objets, cela ne peut pas être exprimé dans le langage de la théorie des catégories. Cette égalité est en fait une égalité syntaxique, dans le métalangage, entre les expressions "$((F \circ G) \circ H)(C)$" et "$(F \circ (G \circ H)(C)$", après dépliage de la définition de foncteur composé. C'est ce qui est appelée souvent en théorie des types "égalité intensionnelle" ou "égalité définitionnelle" (l'égalité du langage (qui ici n'existe qu'entre flèches d'un objet fixé A vers un objet fixé B) est appelée "égalité extensionnelle").

Le point de vue adopté ici est que les résultats dits de cohérence, qui expriment ce genre de strictitude, sont des métathéorèmes affirmant l'existence d'une description équivalente d'une catégorie, ou d'une 2-catégorie, dans laquelle certains isomorphismes peuvent être pris comme des identités. On notera $\equiv$ l'égalité syntaxique (définitionnelle) : $(F \circ G) \circ H \equiv F \circ (G \circ H)$.

Le grand intérêt des résultats de cohérence est de simplifier les calculs et de réduire la taille des diagrammes. Mais on ne considérera pas ici qu'il y a d'une part des 2-catégories faibles (ou bicatégories [5]) et d'autre part des 2-catégories strictes ; la définition utilisée sera la version dite "faible", qui est la seule disponible en l'absence d'égalité au niveau des objets et des flèches d'une 2-catégorie, la version stricte étant une description simplifiée qui est rendue possible par un théorème de cohérence. Les bicatégories ont été formalisées, dans le système `Agda`, par Olov Wilander [19].

C'est pourquoi les notions 2-catégorielles seront ici toutes par défaut les plus faibles possibles (n'utilisant d'égalité qu'au niveau des 2-flèches). Mais on utilisera lorsque c'est utile des descriptions strictifiées de ces notions. Cela a une conséquence en ce qui concerne la terminologie : on ne s'encombrera pas des préfixes "pseudo-" ou "bi-" qui sont inutiles en l'absence de notions concurrentes. On utilisera le même nom pour les notions 2-dimensionnelles lorsqu'elles se réduisent aux notions 1-dimensionnelles correspondantes dans une catégorie vue comme une 2-catégorie localement discrète (dans ce cas la notion 2-dimensionnelle est une généralisation de la notion 1-dimensionnelle). Mais on ajoutera le préfixe "2-" lorsque la notion 2-dimensionnelle est un analogue de la notion 1-dimensionnelle, mais n'en est pas une généralisation. Par exemple, les 2-relations sont l'analogue 2-dimensionnel des relations dans les catégories, mais dans une catégorie les 2-relations ne sont pas des relations (mais des spans quelconques), donc le préfixe "2-" est nécessaire ; par contre, la définition du noyau d'une flèche en dimension 2 devient la définition usuelle en dimension 1, on n'utilisera donc pas le préfixe "2-". Si l'on travaillait dans la 3-catégorie des 2-catégories internes, la présence d'égalités entre objets et flèches permettrait de distinguer différents niveaux de strictitude ; dans ce cas, on utilisera le mot sans préfixe pour le cas le plus faible, par cohérence avec la convention prise ci-dessus, et on ajoutera l'adjectif "strict" pour désigner le cas où les 2-flèches de cohérence sont remplacées par des égalités.

6 Dimension des structures catégorielles d'ordre supérieur

La théorie des catégories de dimensions supérieures est présentée usuellement de la façon suivante : en dimension 1, on étudie des 1-catégories (Ens-catégories) [qui sont souvent des catégories d'ensembles avec structure], en dimension 2, on étudie des 2-catégories (Cat-catégories) [qui sont souvent des 2-catégories de catégories avec structure], en dimension 3 on étudie des 3-catégories, et ainsi de suite. On a donc une hiérarchie

$$\mathsf{Ens} \hookrightarrow \mathsf{Cat} \hookrightarrow 2\text{-}\mathsf{Cat} \hookrightarrow \dots \tag{2}$$

Mais ce point de vue a deux défauts.

1. Les ordres sont des catégories mais pas des ensembles ; ils seraient donc classifiés comme étant de dimension supérieure par rapport aux ensembles et de même dimension que les catégories. Or la réalité est très différente : dans les ordres comme dans les ensembles toutes les flèches sont égales (tous les diagrammes commutent), tandis que dans les catégories il peut y avoir autant de flèches que l'on veut entre deux objets, il y a donc un degré de liberté supplémentaire par rapport aux ordres et aux ensembles. Ce degré de liberté supplémentaire est la source des phénomènes proprement 2-dimensionnels : lorsque l'on définit des structures algébriques sur des catégories, les flèches qui expriment les axiomes d'associativité, commutativité, etc., doivent satisfaire des conditions de cohérence. Un deuxième aspect proprement 2-dimensionnel est le dédoublement de notions ordinaires : on a deux sortes de monomorphismes et d'épimorphismes, de noyaux, deux factorisations des flèches, etc. On reviendra à cela plus tard. Les ordres ne connaissent pas ces phénomènes.
2. Un autre problème avec cette notion de dimension officielle est que, lors du passage des ensembles aux catégories (et donc des Ens-catégories aux Cat-catégories), il y a deux changements en même temps : un changement

de dimension, mais aussi un changement d'un cas groupoïdal au cas non-groupoïdal. Et certains phénomènes qui sont en fait dus à la perte de la symétrie sont parfois attribués à la dimension supérieure (par exemple la distinction entre produit fibré et objet comma). Il est donc préférable de séparer ces deux changements. Dans ce travail, on montera d'une dimension, mais on restera dans le cas symétrique (groupoïdal).

On dira donc qu'une structure catégorielle (à penser comme une ω-catégorie) est de dimension n si pour tout $k > n+1$, toutes les k-flèches entre deux $(k-1)$-flèches sont égales. Cela est équivalent à demander que pour toute paire de $(k-1)$-flèches α, β, il y ait exactement une k-flèche (à équivalence près) de α vers β. Dans une ω-catégorie de dimension n, on a donc au plus une $(n+1)$-flèche (à isomorphisme près) entre deux n-flèches (car elles sont toutes égales).

Pour $n = 0$, on a donc les ordres, pour $n = 1$, les Ord-catégories (ou 2-ordres), pour $n = 2$, les $2\text{-}\mathsf{Ord}$-catégories (ou 3-ordres), et ainsi de suite. John Baez, Toby Bartels et James Dolan ont remarqué que l'on peut aussi attribué des valeurs négatives à n (voir [3]). Pour $n = -1$, il peut y avoir au plus une 0-flèche, c'est-à-dire au plus un objet. On peut appeler les (-1)-ordres *valeurs de vérité* ; le (-1)-ordre vide est la valeur de vérité "faux" et le (-1)-ordre à un objet est la valeur de vérité "vrai". On note $\Omega := (-1)\text{-}\mathsf{Ord}$. Pour $n = -2$, la définition a aussi un sens, quand on la prend sous la forme «pour $k > n+1$, pour toute paire de $(k-1)$-flèches α, β, il y a exactement une k-flèche de α vers β» : on doit avoir, pour $k > -1$, c'est-à-dire $k \geq 0$ exactement une k-flèche entre chaque paire de $(k-1)$-flèches : pour $k = 0$, cela signifie qu'il doit y avoir exactement un objet dans l'ω-catégorie, avec une flèche sur cet objet, une 2-flèche, etc. C'est donc 1, et $(-2)\text{-}\mathsf{Ord} = 1$ (c'est semble-t-il un exemple de réflexivité non-contradictoire, un autre étant le fait qu'$\omega\text{-}\mathsf{Cat}$[1] est une ω-catégorie). La hiérarchie fondamentale est donc plutôt :

$$1 \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \mathsf{Ord} \hookrightarrow 2\text{-}\mathsf{Ord} \hookrightarrow \ldots, \tag{3}$$

où $\Omega = 1\text{-}\mathsf{Cat}$, $\mathsf{Ord} = 2\text{-}\mathsf{Cat}$ et ainsi de suite. C'est ce cadre qui servira de référence dans ce texte.

À chaque niveau, les groupoïdes jouent un rôle spécial. Aux deux premiers niveaux, tout est un groupoïde. Au niveau 3, les groupoïdes sont les ensembles, et au niveau suivant, ce sont les groupoïdes usuels. Ce travail concerne une part de l'algèbre 2-dimensionnelle, qui généralise l'algèbre usuelle, sur des ensembles. Il s'agit ici d'algèbre sur des "2-ensembles", c'est-à-dire sur des groupoïdes.

[1] qui devrait plutôt être appelé $\omega\text{-}\mathsf{Ord}$

Cela rentre dans le diagramme suivant, qui se retrouve également dans [3].

$$
\begin{tikzcd}
2\text{-}\mathsf{Gpd} \arrow[r] & \mathsf{Gpd}\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[r] & 2\text{-}\mathsf{Cat} \arrow[r] & 3\text{-}\mathsf{Ord} \\
 & \mathsf{Gpd} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{Cat} \arrow[u] \arrow[r] & 2\text{-}\mathsf{Ord} \arrow[u] \\
 & & \mathsf{Ens} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{Ord} \arrow[u] \\
 & & & \Omega \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & & & 1 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

Le rôle des catégories ordinaires dans ce schéma est que les ensembles avec structure forment des Ens-catégories. Le rôle joué en dimension 1 par les ensembles étant joué en dimension 2 par les groupoïdes, le niveau de généralité pertinent pour ce travail est celui des Gpd-catégories, et non celui des Cat-catégories (ou 2-catégories). C'est pourquoi il sera systématiquement question de Gpd-catégories (une autre raison est que la Gpd-catégorie des groupoïdes a de meilleures propriétés, sur le plan des factorisations, que la 2-catégorie des catégories).

Références

[1] P. Aczel, *Galois : a theory development project.* 2, 4

[2] P. Agéron, *La philosophie mathématique de Roger Apéry*, Philosophia Scientiae, cahier spécial 5 "Fonder autrement les mathématiques" (2005), pp. 233–256. 4

[3] J. Baez et M. Shulman, *Lectures on n-categories and cohomology*, prépublication, 2007 (`arXiv :math/0608420v2`). 8, 9

[4] T. Bartels, *Higher gauge theory I : 2-bundles*, prépublication, 2006 (`arXiv :math/0410328v3`). 5

[5] J. Bénabou, *Introduction to bicategories*, dans Reports of the Midwest Category Seminar, Lecture Notes in Math., vol. 47, Springer, 1967, pp. 1–77. 6

[6] J. Bénabou, *Fibered categories and the foundations of naive category theory*, The Journal of Symbolic Logic, 50 (1985), pp. 10–37. 4

[7] E. Bishop., *Foundations of constructive analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1967. 1, 2

[8] T. Coquand et G. Huet, *The calculus of constructions*, Inform. and Comput. 76 (1988), pp. 95–120. 1

[9] M. Dupont, *Catégories abéliennes en dimension 2*, thèse de doctorat, Université catholique de Louvain, 2008 (`http ://breckes.org/dokumenty/these.pdf`). 1

[10] P. J. Freyd, *Abelian Categories*, Harper and Row, 1964. Republié dans : Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 3 (2003), pp. 1–190 (`http ://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/3/tr3abs.html`). 4

[11] G. Huet et A. Saïbi, *Constructive category theory*, dans Proof, language, and interaction, Found. Comput. Ser., MIT Press, 2000, pp. 239–275. 2, 4

[12] F. W. Lawvere, *Metric spaces, generalized logic, and closed categories*, Rendiconti del seminario matématico e fisico di Milano, XLIII (1973), pp. 135-166. Republié dans : Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 1 (2002), pp. 1–37 (`http ://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/1/tr1abs.html`). 3

[13] F. W. Lawvere, *Variable quantities and variable structures in topoi*, dans Algebra, topology, and category theory, Academic Press, 1976, pp. 101-131. 2

[14] F. W. Lawvere et R. Rosebrugh, *Sets for mathematics*, Cambridge University Press, 2003. 2

[15] M. Makkai, *Avoiding the axiom of choice in general category theory*, J. Pure Appl. Algebra, 108 (1996), pp. 109–173. 5

[16] M. Makkai, *Towards a categorical foundation of mathematics*, dans Logic Colloquium '95, Lecture Notes in Logic, vol. 11, Springer, 1998, pp. 153–190. 4, 6

[17] J.-P. Marquis, *Categories, sets and the nature of mathematical entities*, dans The age of alternative logics : Assessing philosophy of logic and mathematics today, Springer, 2006, pp. 181–192. 4, 6

[18] P. Martin-Löf, *An intuitionistic theory of types*, dans Twenty-five years of constructive type theory (Venice, 1995), Oxford Logic Guides, vol. 36, Oxford Univ. Press, 1998, pp. 127–172. 1

[19] O. Wilander., *An E-bicategory of E-categories exemplifying a type-theoretic approach to bicategories*, rapport U.U.D.M. 2005 :48, Department of Mathematics, Uppsala University, 2005. 2, 4, 6