Université Catholique de Louvain

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

# Catégories enrichies dans une base munie d'un système de factorisation

Mémoire présenté par Mathieu Dupont
en vue de l'obtention du
Diplôme d'Etudes Approfondies
en mathématiques

*Promoteur* : Enrico Vitale

Année académique 2001-2002

# Table des matières

# Introduction

Un objectif sous-jacent de ce travail est de donner une définition de la notion de 2-catégorie abélienne. Si l'on part du fait qu'une catégorie abélienne est la catégorie sous-jacente d'une **Ab**-catégorie vérifiant une certaine condition d'exactitude, une 2-catégorie abélienne devrait être la 2-catégorie sous-jacente à une $\mathcal{V}$-2-catégorie (pour un $\mathcal{V}$ qui est la version 2-catégorielle de **Ab** ; ce sera **CGS**, la 2-catégorie des cat-groupes symétriques) vérifiant certaines conditions d'exactitude. Le problème est de savoir quelles sont ces conditions.

Ces conditions vont devoir imiter les propriétés de **CGS**, tout comme une catégorie abélienne imite **Ab** et sa factorisation épi-mono construite soit en calculant le conoyau du noyau, soit le noyau du conoyau. Mais dans **CGS**, il y a deux système de factorisation, et donc deux notions d'épimorphisme et de monomorphisme, deux notions de noyau, ... Les deux systèmes ont été décrits dans l'article [KV]. Le premier est $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ =(plein essentiellement surjectif, fidèle) et le second $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ =(essentiellement surjectif, plein et fidèle). Il s'agit donc de définir, relativement à chacun de ces systèmes de factorisation, une notion de monomorphisme, d'épimorphisme, ...

C'est là que surgit la prépublication [BSS] où, dans le cas des bicatégories et relativement à une classe de foncteurs dans **Cat**, sont définis monomorphismes, noyaux, quotients, épimorphismes réguliers, congruences, bicatégories régulières et exactes.

Ce travail consiste essentiellement en une version enrichie dans une catégorie monoïdale symétrique fermée $\mathcal{V}$ et 1-dimensionnelle (pour le moment) de [BSS], avec deux différences : tout d'abord, ici, c'est relativement à un système de factorisation sur $\mathcal{V}$ (ou plus généralement à une paire de classes de flèches orthogonales (paire orthogonale)) que tout est défini ; cela ne change rien fondamentalement ; on peut remplacer dans [BSS] la classe de flèches de $\mathcal{V}$ par la paire orthogonale qu'elle engendre. Le seul véritable apport, par rapport à [BSS], c'est la définition des épimorphismes relatifs à la paire orthogonale $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ (cela est nécessaire pour le but sous-jacent) ; mais celle-ci nécessite que $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ vérifie une propriété spéciale, qui est d'être "définissable". Une paire orthogonale $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définie par une autre paire orthogonale $(\mathcal{E}', \mathcal{M}')$ si

$$f \in \mathcal{E} \ \Leftrightarrow\ \forall Y \in \mathcal{V},\ [f, Y] \in \mathcal{M}'. \tag{1}$$

Dans le cas $\mathcal{V} = \mathbf{CGS}$, les deux systèmes $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ et $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ sont définissables ; mieux encore, ils se définissent l'un l'autre (on dit alors qu'ils sont couplés) :

1. un foncteur $F$ est essentiellent surjectif (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{E}_1$) si et seulement si pour tout $\mathbb{Y} \in \mathbf{CGS}$, $[F, \mathbb{Y}]$ est fidèle (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{M}_0$) ;

2. un foncteur $F$ est plein et essentiellent surjectif (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{E}_0$) si et seulement si pour tout $\mathbb{Y} \in$ **CGS**, $[F, \mathbb{Y}]$ est plein et fidèle (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{M}_1$).

Après un premier chapitre consacré à un rappel sur les catégories enrichies et les limites pondérées, le deuxième chapitre expose en détail les propriétés d'une paire orthogonale dans $\mathcal{V}$, de manière à aboutir à définir les monomorphismes relatifs à $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ (appelés $\mathcal{M}$-morphismes) et, au cas où $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable, à définir les épimorphismes relatifs à $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ (appelés $\mathcal{E}$-morphismes).

Le troisième et dernier chapitre expose dans ce cadre la théorie de la prépublication [BSS], avec les apports de la condition de définissabilité. Il aboutit à la définition des $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-catégories : une $\mathcal{V}$-catégorie est une $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-catégorie si elle imite la catégorie $\mathcal{V}$ munie d'un système de factorisation fixé $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, c'est-à-dire si les $\mathcal{E}$-morphismes et les $\mathcal{M}$-morphismes forment un système de factorisation dans la $\mathcal{V}$-catégorie (qui peut être construit à la fois par le quotient d'un noyau, ou par le coquotient d'un conoyau ; mais ce ne sont pas deux constructions duales au sens strict du terme, en ce sens que si le noyau utilisé est l'$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-noyau (le noyau défini grâce à $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$), ce n'est pas l'$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-conoyau qui est utilisé, mais l'$(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$-conoyau, où $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$ est l'associée de $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, qui définit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ et qui sert à définir les $\mathcal{E}$-morphismes). Il est possible maintenant de proposer une définition de 2-catégorie abélienne : une 2-catégorie abélienne est une $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-catégorie pour toutes les paires orthogonales définissables $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sur **CGS** (qui sont sans doute au nombre de 4 : les deux systèmes de factorisation triviaux, ainsi que $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ et $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$). La partie de ce chapitre concernant les $\mathcal{V}$-catégories $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-régulières, $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-exactes et les $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-catégories est loin d'être achevée ; on n'en trouve ici qu'une esquisse.

Les exemples considérés sont **Ens** et **Ab**, plus les 2-exemples (ce ne sont pas à strictement parler des exemples de ce travail, mais des exemples de sa version 2-catégorielle à venir) **CGS** et **Cat**. Les 2-exemples ont l'intérêt d'être moins triviaux que les 1-exemples (où toutes les paires orthogonales définissables non triviales connues sont couplées avec elles-même), car on y trouve en général deux paires orthogonales définissables connues non triviales, couplées ensemble. Ils montrent ainsi plus clairement les points où il est nécessaire d'avoir cette définissabilité. Il semblerait même qu'il y ait un lien entre la "dimension" de $\mathcal{V}$ et le nombre de paires orthogonales définissables non triviales sur $\mathcal{V}$. On pourrait proposer la définition suivante : une $\mathcal{V}$-catégorie est parfaite si c'est une $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-catégorie pour toutes les paires orthogonales $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sur $\mathcal{V}$ ; ainsi, abélienne = **Ab**-parfaite et 2-abélienne = **CGS**-parfaite (à condition que les paires orthogonales définissables connues sur ces deux catégories soient bien les seules, comme c'est le cas pour **Ens**).

# Chapitre 1

# Catégories enrichies et limites pondérées

Il s'agit seulement de préciser les notations et de rappeler les propriétés ; pour les détails, je renvoie à [Kel ; Bor2]. Pour tout le chapitre, fixons une catégorie monoïdale symétrique fermée $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_{\mathrm{sj}}, \otimes, [-,-], I, ...)$.

## 1.1 Catégorie sous-jacente

Considérons $\mathcal{V}_{\mathrm{sj}}(I,-) : \mathcal{V}_{\mathrm{sj}} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur d'oubli (noté $\mathcal{V}(I,-)$ dans la suite) et $\mathcal{V}$-$\mathbf{Cat}$ la 2-catégorie des $\mathcal{V}$-catégories, $\mathcal{V}$-foncteurs et transformations $\mathcal{V}$-naturelles. Le foncteur $\mathcal{V}(I,-)$ induit un 2-foncteur

$$(-)_{\mathrm{sj}} : \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}, \tag{1.1}$$

qui n'est autre que $\mathcal{V}$-$\mathbf{Cat}(\mathbb{I},-)$, où $\mathbb{I}$ a un objet $*$ et $\mathbb{I}(*,*) = I$. Si $\mathbb{C} \in \mathcal{V}$-$\mathbf{Cat}$, $\mathbb{C}_{\mathrm{sj}}$ a les mêmes objets que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}_{\mathrm{sj}}(A,B) = \mathcal{V}(I, \mathbb{C}(A,B))$. Les éléments de $\mathbb{C}_{\mathrm{sj}}(A,B)$ seront abusivement appelés flèches de $A$ vers $B$ dans $\mathbb{C}$. De même, si $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un $\mathcal{V}$-foncteur, par abus de notation, $F(f)$ signifiera $F_{\mathrm{sj}}(f)$, lorsque $f$ est une flèche dans $\mathbb{C}$.

Si $\mathcal{V}$ a tous les tenseurs par les ensembles (c'est-à-dire les copuissances ; notons $S \bullet V = \coprod_S V$ le tenseur de $S \in \mathbf{Ens}$ et $V \in \mathcal{V}$), $\mathcal{V}(I,-)$ a un adjoint à gauche $- \bullet I : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{sj}}$, qui induit un biadjoint à gauche de $(-)_{\mathrm{sj}}$, qui sera noté $L : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathcal{V}$-$\mathbf{Cat}$. Si $\mathbb{X}$ est une catégorie normale, les objets de $L(\mathbb{X})$ sont ceux de $\mathbb{X}$ et $L(\mathbb{X})(X,Y) = \mathbb{X}(X,Y) \bullet I$.

$\mathcal{V}$-$\mathbf{Cat}$ est une 2-catégorie monoïdale : si $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ sont deux $\mathcal{V}$-catégories, $\mathbb{C} \otimes \mathbb{D}$ a pour objets les paires $(C,D)$ avec $C \in \mathbb{C}$ et $D \in \mathbb{D}$, et par ailleurs $\mathbb{C} \otimes \mathbb{D}((C,D),(C',D')) = \mathbb{C}(C,C') \otimes \mathbb{D}(D,D')$ ; l'unité est $\mathbb{I}$ défini plus haut. Le foncteur d'oubli $\mathcal{V}(I,-)$ n'étant que lax-monoïdal, $(-)_{\mathrm{sj}}$ ne préserve le produit tensoriel qu'à un foncteur près :

$$\tau_{\mathbb{C}\mathbb{D}} : \mathbb{C}_{\mathrm{sj}} \times \mathbb{D}_{\mathrm{sj}} \longrightarrow (\mathbb{C} \otimes \mathbb{D})_{\mathrm{sj}}; \tag{1.2}$$

il en va de même pour l'unité : $\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{I}_{\mathrm{sj}}$. Une propriété utile de $\tau$ est que si $T : \mathbb{C} \otimes \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{E}$ est un $\mathcal{V}$-foncteur, on peut définir le foncteur

$$\hat{T} : \mathbb{C}_{\mathrm{sj}} \times \mathbb{D}_{\mathrm{sj}} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{C}\mathbb{D}}} (\mathbb{C} \otimes \mathbb{D})_{\mathrm{sj}} \xrightarrow{T_{\mathrm{sj}}} \mathbb{E}_{\mathrm{sj}}. \tag{1.3}$$

Alors, $(T(C,-))_{\mathrm{sj}} = \hat{T}(C,-)$ et $(T(-,D))_{\mathrm{sj}} = \hat{T}(-,D)$. Par contre, $-\bullet I$ est pseudo-monoïdal (car $(S\times T)\bullet I \cong (S\bullet I)\otimes(T\bullet I)$, parce que $\otimes$ est fermé). Dès lors le 2-foncteur $L : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat}$ préserve le produit tensoriel à équivalence près : $L(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}) \cong L\mathbb{X}\otimes L\mathbb{Y}$ et $L(\mathbf{1}) \cong \mathbb{I}$.

## 1.2 $\mathcal{V}$-foncteurs représentables

Tout d'abord, si $\mathbb{C} \in \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat}$, la $\mathcal{V}$-catégorie duale est $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ dont les objets sont ceux de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}(A,B) = \mathbb{C}(B,A)$.

Il y a alors un $\mathcal{V}$-foncteur

$$\mathbb{C}(-,-) : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{V}, \tag{1.4}$$

qui envoie $(A,B)$ sur $\mathbb{C}(A,B)$. Les $\mathcal{V}$-foncteurs représentables de $\mathbb{C}$ sont les $\mathcal{V}$-foncteurs partiels de $\mathbb{C}(-,-)$ :

$$\mathbb{C}(-,B) : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \cong \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{1\otimes B} \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}(-,-)} \mathcal{V}; \tag{1.5}$$

$$\mathbb{C}(A,-) : \mathbb{C} \cong \mathbb{I} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{A\otimes 1} \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}(-,-)} \mathcal{V}. \tag{1.6}$$

Alors par abus de notation le foncteur $\widehat{\mathbb{C}(-,-)}$ défini par 1.3 sera noté $\mathbb{C}(-,-) : \mathbb{C}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{sj}} \times \mathbb{C}_{\mathrm{sj}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{sj}}$. Cela correspondra à un précédent abus de notation, comme $\widehat{\mathbb{C}(-,-)}(A,-) = (\mathbb{C}(A,-))_{\mathrm{sj}}$ et donc $\widehat{\mathbb{C}(-,-)}(A,g) = \mathbb{C}(A,g)$. Dans le cas où $\mathbb{C} = \mathcal{V}$, le foncteur $\widehat{\mathbb{C}(-,-)}$ n'est autre que $[-,-] : \mathcal{V}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{sj}} \times \mathcal{V}_{\mathrm{sj}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{sj}}$.

Le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{sj}} \times \mathbb{C}_{\mathrm{sj}} \arrow[r, "\mathbb{C}(-,-)"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_{\mathrm{sj}}}"'] & \mathcal{V}_{\mathrm{sj}} \arrow[d, "\mathcal{V}(I,-)"] \\
 & \mathbf{Ens}
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

## 1.3 $\mathcal{V}$-catégories de foncteurs et Yoneda

Si $T : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un $\mathcal{V}$-foncteur et si $D \in \mathbb{D}$, une transformation naturelle extraordinaire de $D$ vers $T$ est une famille de morphismes $\alpha_C : D \longrightarrow T(C,C)$ dans $\mathbb{D}$ qui rend pour tout $A,B \in \mathbb{C}$, le diagramme suivant commutatif dans $\mathcal{V}_{\mathrm{sj}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}(A,B) \arrow[r, "T(A,-)"] \arrow[d, "T(-,B)"'] & \mathbb{D}(T(A,A),T(A,B)) \arrow[d, "\mathbb{D}(\alpha_A,1)"] \\
\mathbb{D}(T(B,B),T(A,B)) \arrow[r, "\mathbb{D}(\alpha_B,1)"'] & \mathbb{D}(D,T(A,B))
\end{tikzcd} \tag{1.8}$$

Alors la *fin* de $T$, si elle existe, est une transformation naturelle extraordinaire $\lambda$ de $L$ vers $T$ qui est universelle, au sens que pour toute autre transformation naturelle extraordinaire $\alpha$ de $D$ vers $T$, il existe un unique $f : D \longrightarrow L$ tel que pour tout $C \in \mathbb{C}$, $\alpha_C = \lambda_C \circ f$. L'objet $L$ est alors noté $\int_{C\in\mathbb{C}} T(C,C)$. Si $\mathcal{V}_{\text{sj}}$ est complète et si $\mathbb{C}$ est équivalente à une petite $\mathcal{V}$-catégorie, alors la fin de tout foncteur $T : \mathbb{C}^{\text{op}} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{V}$ existe. Dans le cas d'un tel foncteur $T : \mathbb{C}^{\text{op}} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{V}$, les foncteurs $[V,-] : \mathcal{V}_{\text{sj}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\text{sj}}$ préservent les fins :

$$[V, \int_C T(C,C)] \cong \int_C [V, T(C,C)]. \tag{1.9}$$

Si $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ sont des $\mathcal{V}$-catégories, la $\mathcal{V}$-catégorie de foncteurs de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$ (notée $[\mathbb{C},\mathbb{D}]$) a pour objets les $\mathcal{V}$-foncteurs de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$ et si $F, G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$,

$$[\mathbb{C},\mathbb{D}](F,G) = \int_C \mathbb{D}(FC, GC), \tag{1.10}$$

si cette fin existe. Par 1.9, on a

$$[V, [\mathbb{C},\mathcal{V}](F,G)] \cong [\mathbb{C},\mathcal{V}](F, [V, G-]). \tag{1.11}$$

Si l'on suppose que $\mathcal{V}_{\text{sj}}$ est complète, ce qui sera toujours fait par la suite, $[\mathbb{C},\mathbb{D}]$ existe si $\mathbb{C}$ est petite.

Les propriétés principales de $[\mathbb{C},\mathbb{D}]$ sont d'abord que $[\mathbb{C},\mathbb{D}]_{\text{sj}} = \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat}(\mathbb{C},\mathbb{D})$ et ensuite qu'il y a une équivalence de catégories

$$\mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat}(\mathbb{B}, [\mathbb{C},\mathbb{D}]) \cong \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat}(\mathbb{B}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{D}), \tag{1.12}$$

pseudo-naturelle en chaque variable.

**Théorème 1.1** (Lemme de Yoneda)**.** *Pour tout $\mathcal{V}$-foncteur $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{V}$ et pour tout $A \in \mathbb{C}$, il y a un isomorphisme dans $\mathcal{V}_{\text{sj}}$*

$$FA \cong [\mathbb{C},\mathcal{V}](\mathbb{C}(A,-), F), \tag{1.13}$$

*$\mathcal{V}$-naturel en $F$ et en $A$.*

Si $[\mathbb{C},\mathcal{V}]$ existe, par l'équivalence 1.12, au $\mathcal{V}$-foncteur $\mathbb{C}(-,-) : \mathbb{C}^{\text{op}}\otimes\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{V}$ correspond un $\mathcal{V}$-foncteur, le plongement de Yoneda,

$$Y : \mathbb{C}^{\text{op}} \longrightarrow [\mathbb{C},\mathcal{V}], \tag{1.14}$$

qui envoie $C$ sur $\mathbb{C}(C,-)$. Un corollaire du lemme de Yoneda est que ce $\mathcal{V}$-foncteur est plein et fidèle (c'est-à-dire $\mathbb{C}(A,B) \cong [\mathbb{C},\mathcal{V}](\mathbb{C}(B,-),\mathbb{C}(A,-))$. En général, le foncteur sous-jacent d'un $\mathcal{V}$-foncteur plein et fidèle est lui-même plein et fidèle ; ici, on en conclut que pour toute transformation $\mathcal{V}$-naturelle $\alpha : \mathbb{C}(B,-) \longrightarrow \mathbb{C}(A,-)$ il existe un unique $a : A \longrightarrow B$ tel que $\alpha = \mathbb{C}(a,-)$ ; $a$ est un iso si et seulement si $\alpha$ l'est.

## 1.4 Limites pondérées

**Définition 1.2.** Soit $\phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{V}$ et $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, deux $\mathcal{V}$-foncteurs. La *limite de $F$ pondérée par $\phi$* est un objet $\{\phi, F\} \in \mathbb{C}$ qui représente le foncteur $[\mathbb{D}, \mathcal{V}](\phi, \mathbb{C}(-, F)) : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$, c'est-à-dire il y a un isomorphisme $\mathcal{V}$-naturel en $X \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{C}(X, \{\phi, F\}) \cong [\mathbb{D}, \mathcal{V}](\phi-, \mathbb{C}(X, F-)). \tag{1.15}$$

Cette limite est donnée par $(\{\phi, F\}, \mu)$, où $\mu : \phi \Rightarrow \mathbb{C}(\{\phi, F\}, F-)$ est la counité de la représentation.

Cette définition peut avoir un sens même si $\mathbb{D}$ n'est pas une petite $\mathcal{V}$-catégorie, et que $[\mathbb{D}, \mathcal{V}]$ n'est pas une $\mathcal{V}$-catégorie. Pour cela, il faut plonger $\mathcal{V}$ dans une catégorie monoïdale symétrique fermée $\mathcal{V}'$ plus grande (cfr. [Kel]).

Il y a un $\mathcal{V}$-foncteur

$$\{-, -\} : [\mathbb{D}, \mathcal{V}]^{\mathrm{op}} \otimes [\mathbb{D}, \mathbb{C}] \longrightarrow \mathbb{C}, \tag{1.16}$$

défini sur les $(\phi, F)$ tels que $\{\phi, F\}$ existe.

**Définition 1.3.** Soit $\psi : \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ un et $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, deux $\mathcal{V}$-foncteurs. La *colimite de $F$ pondérée par $\psi$* est un objet $\psi \star F \in \mathbb{C}$ qui représente le foncteur $[\mathbb{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](\psi, \mathbb{C}(F, -)) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{V}$, c'est-à-dire il y a un isomorphisme $\mathcal{V}$-naturel en $Y \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{C}(\psi \star F, Y) \cong [\mathbb{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](\psi-, \mathbb{C}(F-, Y)). \tag{1.17}$$

Cette colimite est donnée par $(\psi \star F, \nu)$, où $\nu : \psi \Rightarrow \mathbb{C}(F-, \psi \star F)$ est l'unité de la représentation.

Il y a aussi un $\mathcal{V}$-foncteur

$$- \star - : [\mathbb{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}] \otimes [\mathbb{D}, \mathbb{C}] \longrightarrow \mathbb{C}, \tag{1.18}$$

défini sur les $(\psi, F)$ pour lesquels $\psi \star F$ existe.

Par 1.11, quand $\mathbb{C} = \mathcal{V}$, on a

$$\{\phi, F\} \cong [\mathbb{D}, \mathcal{V}](\phi, F). \tag{1.19}$$

Et $\mathcal{V}$ étant complet, cette limite existe si $\mathbb{D}$ est petite.

Il s'ensuit que pour toute $\mathcal{V}$-catégorie $\mathbb{C}$,

**Proposition 1.4.** *si $L \in \mathbb{C}$,*

1. *$L = \{\phi, F\}$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{C}$,*

$$\mathbb{C}(X, L) \cong \{\phi, \mathbb{C}(X, F-)\}; \tag{1.20}$$

2. *$L = \psi \star F$ si et seulement si pour tout $Y \in \mathbb{C}$,*

$$\mathbb{C}(L, C) \cong \{\psi, \mathbb{C}(F-, C)\}. \tag{1.21}$$

Et donc les foncteurs représentables préservent les limites.

Notons que par symétrie de $\otimes$, si $\mathbb{C} = \mathcal{V}$, et $F, G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{V}$,

$$F \star G \cong G \star F. \tag{1.22}$$

Par Yoneda, nous avons les isomorphismes suivant, dans le cas de poids représentables : si $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\{\mathbb{C}(C,-), G\} \cong GC \cong \mathbb{C}(-,C) \star G. \tag{1.23}$$

Considérons le cas des limites dans les $\mathcal{V}$-catégories de foncteurs.

**Proposition 1.5.** *Soit $F : \mathbb{D} \longrightarrow [\mathbb{A},\mathbb{B}]$ ; $F$ correspond par adjonction à $\widehat{F} : \mathbb{D}\otimes\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$. Si pour tout $A \in \mathbb{A}$, $\{\phi, \widehat{F}(-,A)\}$ existe dans $\mathbb{B}$, alors $\{\phi, F\}$ existe dans $[\mathbb{A},\mathbb{B}]$, et $\{\phi, F\}(A) \cong \{\phi, \widehat{F}(-,A)\}$ (on dit alors que la limite $\{\phi, F\}$ existe* ponctuellement*).*

Nous aurons besoin aussi de limites dont les poids ont des paramètres. Le poids est ici un $\mathcal{V}$-foncteur $\phi : \mathbb{P}^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{V}$ (qui correspond à $\widehat{\phi} : \mathbb{P}^{\mathrm{op}} \longrightarrow [\mathbb{D},\mathcal{V}]$), c'est-à-dire un module de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{P}$. Si toutes les limites pondérées par un $\phi(P,-)$ existent dans $\mathbb{C}$, il y a un $\mathcal{V}$-foncteur

$$\mathbb{P}^{\mathrm{op}} \otimes [\mathbb{D},\mathbb{C}] \xrightarrow{\widehat{\phi}\otimes 1} [\mathbb{D},\mathcal{V}] \otimes [\mathbb{D},\mathbb{C}] \xrightarrow{\{-,-\}} \mathbb{C}, \tag{1.24}$$

qui donne alors par adjonction le $\mathcal{V}$-foncteur

$$\{\phi,-\} : [\mathbb{D},\mathbb{C}] \longrightarrow [\mathbb{P}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}]; \tag{1.25}$$

la limite de $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ pondérée par $\phi$ est alors le $\mathcal{V}$-foncteur $\{\phi, F\} : \mathbb{P}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Dans le cas des colimites, un poids est un $\mathcal{V}$-foncteur $\psi : \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{V}$ (c'est-à-dire un module de $\mathbb{P}$ vers $\mathbb{D}$), qui donne un $\mathcal{V}$-foncteur

$$\psi \star - : [\mathbb{D},\mathbb{C}] \longrightarrow [\mathbb{P},\mathbb{C}]; \tag{1.26}$$

la colimite de $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ pondérée par $\psi$ est alors le $\mathcal{V}$-foncteur $\psi\star F : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Pour terminer, définissons deux cas particuliers de limites pondérées. Tout d'abord le cotenseur et le tenseur ; ensuite, les limites coniques.

**Définition 1.6.**

1. Si $V \in \mathcal{V}$ (que l'on peut voir comme $V : \mathbb{I} \longrightarrow \mathcal{V}$) et $C \in \mathbb{C}$ (que l'on peut voir comme $C : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{C}$), le *produit cotensoriel* ou *cotenseur* de $V$ et $C$ est $\{V, C\}$, noté $[V,C]$. Sa propriété universelle est que pour tout $X \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}(X,[V,C]) \cong [V, \mathbb{C}(X,C)]; \tag{1.27}$$

et l'unité est $V \longrightarrow \mathbb{C}([V,C],C)$.

2. Si $V \in \mathcal{V}$ (ou $V : \mathbb{I}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$) et $C \in \mathbb{C}$ (ou $C : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{C}$), le *produit tensoriel* ou *tenseur* de $V$ et $C$ est $V \star C$, noté $V \otimes C$. Sa propriété universelle est que pour tout $Y \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}(V \otimes C, Y) \cong [V, \mathbb{C}(C,Y)]; \tag{1.28}$$

et l'unité est $V \longrightarrow \mathbb{C}(C, V \otimes C)$.

Quand $\mathbb{C} = \mathcal{V}$, le cotenseur est le hom interne $[-,-]$ et le tenseur est le produit tensoriel $- \otimes -$.

**Définition 1.7.** Si $\mathbb{D} \in \mathbf{Cat}$, $\mathbb{C} \in \mathcal{V}$-$\mathbf{Cat}$ et $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathrm{sj}}$ (qui correspond par adjonction à $\tilde{F} : L\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$), notons $\phi : L\mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{V}$ le $\mathcal{V}$-foncteur correspondant par adjonction au foncteur constant $\Delta I : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{sj}}$. Alors $\{\phi, \tilde{F}\}$ si elle existe est appelée la *limite conique* dans $\mathbb{C}$ de $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathrm{sj}}$, et est notée $\lim F$. Elle est définie par

$$\mathbb{C}(X, \lim F) \cong \lim \mathbb{C}(X, \tilde{F}-) \tag{1.29}$$

dans $\mathcal{V}_{\mathrm{sj}}$. (Le foncteur $\mathbb{C}(X, \tilde{F}-) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{sj}}$.) La counité est un cône $(\mu_D : \lim F \longrightarrow FD)$.

Si $\lim F$ existe, comme $\mathcal{V}(I, -)$ préserve les limites, cette limite est aussi la limite ordinaire dans $\mathbb{C}_{\mathrm{sj}}$ du foncteur $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathrm{sj}}$. La réciproque n'est pas toujours vraie ; c'est le cas quand $\mathcal{V}(I, -)$ est conservatif ou quand $\mathbb{C}$ a tous les tenseurs (et donc en particulier quand $\mathbb{C} = \mathcal{V}$).

On dira qu'une $\mathcal{V}$-catégorie est *complète* si elle admet toutes les limites pondérées par un poids $\phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{V}$ où $\mathbb{D}$ est une *petite* $\mathcal{V}$-catégorie. On définit de la même façon les $\mathcal{V}$-catégories *cocomplètes*. Alors si $\mathcal{V}_{\mathrm{sj}}$ est complète et cocomplète, $\mathcal{V}$ est complète et cocomplète en tant que $\mathcal{V}$-catégorie.

## 1.5 Extensions de Kan et sous-catégories denses

**Définition 1.8.** Soit le diagramme de $\mathcal{V}$-foncteurs suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "K"] \arrow[dr, "G"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "T"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{1.30}$$

1. Une transformation $\mathcal{V}$-naturelle $\alpha : TK \Rightarrow G$ présente $T$ comme l'*extension de Kan à droite* de $G$ le long de $K$ si, pour tout $D \in \mathbb{D}$,

   $$TD \cong \{\mathbb{D}(D, K-), G\}. \tag{1.31}$$

   Le $\mathcal{V}$-foncteur $T$ est alors noté $\mathrm{Ran}_K G$.
2. Une transformation $\mathcal{V}$-naturelle $\beta : G \Rightarrow TK$ présente $T$ comme l'*extension de Kan à gauche* de $G$ le long de $K$ si, pour tout $D \in \mathbb{D}$,

   $$TC \cong \mathbb{D}(K-, D) \star G. \tag{1.32}$$

   Dans ce cas, le $\mathcal{V}$-foncteur $T$ est noté $\mathrm{Lan}_K G$.

Voici uniquement les propriétés des extensions de Kan qui seront utiles par la suite.

**Proposition 1.9.** *1. Si $K$ est plein et fidèle, alors $\alpha : T \circ \mathrm{Ran}_K G \Rightarrow G$ (ou $\beta : G \Rightarrow T \circ \mathrm{Lan}_K G$) est un isomorphisme.*

*2. Si un $\mathcal{V}$-foncteur $F$ préserve les limites pondérées, alors il préserve les extensions de Kan à droite (c'est-à-dire $F \circ \mathrm{Ran}_K G \cong \mathrm{Ran}_K(F \circ G)$). Si un $\mathcal{V}$-foncteur préserve les colimites pondérées (et en particulier si il est un adjoint à gauche), alors il préserve les extensions de Kan à gauche.*

3. *Si on a* $\phi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{V}$*,* $K : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{D}$ *et* $F : \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ *des* $\mathcal{V}$*-foncteurs, et si* $\mathrm{Lan}_K\phi$ *existe, alors*
$$\mathrm{Lan}_K\phi \star F \cong \phi \star FK^{\mathrm{op}}. \tag{1.33}$$

Etudions maintenant les $\mathcal{V}$-foncteurs denses.

**Définition 1.10.** Un $\mathcal{V}$-foncteur $K : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{D}$ est *dense* si l'identité sur $K$ présente
$$1_{\mathbb{D}} \cong \mathrm{Lan}_K K. \tag{1.34}$$
Et $K$ est *codense* si $K^{\mathrm{op}} : \mathbb{K}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{D}^{\mathrm{op}}$ est dense, c'est-à-dire si l'identité sur $K$ présente
$$1_{\mathbb{D}} \cong \mathrm{Ran}_K K. \tag{1.35}$$

La dernière proposition permettra de prouver en pratique que certaines sous-catégorie pleines sont denses.

**Proposition 1.11.** *Un* $\mathcal{V}$*-foncteur pleinement fidèle* $K : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{D}$ *est dense si et seulement si le* $\mathcal{V}$*-foncteur* $\mathbb{D} \longrightarrow [\mathbb{K}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}]$*, qui envoie* $D$ *sur le* $\mathcal{V}$*-foncteur* $\mathbb{D}(K-, D)$*, est plein et fidèle.*

# Chapitre 2

# $\mathcal{M}$- et $\mathcal{E}$-morphismes

Fixons pour tout ce chapitre une catégorie monoïdale symétrique fermée complète et cocomplète $(\mathcal{V}, \otimes, I, [-,-], \ldots)$.

## 2.1 Orthogonalité "interne"

Soit $\mathbb{C}$ une $\mathcal{V}$-catégorie.

Notons $\mathrm{Fl}\mathbb{C} = [L\mathbf{2}, \mathbb{C}]$, la *$\mathcal{V}$-catégorie des flèches* de $\mathbb{C}$. Alors $(\mathrm{Fl}\mathbb{C})_{\mathrm{sj}} = \mathbb{C}_{\mathrm{sj}}^{\mathbf{2}}$ et un objet de $\mathrm{Fl}\mathbb{C}$ est un $\mathcal{V}$-foncteur $L\mathbf{2} \longrightarrow \mathbb{C}$, qui revient à un foncteur $\mathbf{2} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathrm{sj}}$, c'est-à-dire à un morphisme de $\mathbb{C}$.

**Lemme 2.1.** *Si $f : C_0 \longrightarrow C_1$ et $g : D_0 \longrightarrow D_1$ sont deux flèches de $\mathbb{C}$, le diagramme suivant est un produit fibré dans $\mathcal{V}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fl}\mathbb{C}(f,g) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}(C_0, D_0) \arrow[d, "\mathbb{C}(C_0,g)"] \\
\mathbb{C}(C_1, D_1) \arrow[r, "\mathbb{C}(f,D_1)"'] & \mathbb{C}(C_0, D_1)
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

*Preuve.* $\mathrm{Fl}\mathbb{C}(f,g) = [L\mathbf{2}, \mathbb{C}](f,g) = \int_{i \in L\mathbf{2}} \mathbb{C}(C_i, D_i)$ et cette fin n'est autre que le produit fibré ci-dessus. $\square$

Il y a donc une flèche de comparaison

$$\langle f, g \rangle : \mathbb{C}(C_1, D_0) \longrightarrow \mathrm{Fl}\mathbb{C}(f,g). \tag{2.2}$$

**Définition 2.2.** Soit $f : C_0 \longrightarrow C_1$ et $g : D_0 \longrightarrow D_1$ dans $\mathbb{C}$. On dit que $f$ est *$\mathcal{V}$-orthogonal* à $g$ (noté $f \downarrow g$) si $\langle f, g \rangle$ est un isomorphisme, c'est-à-dire si le diagramme suivant est un produit fibré dans $\mathcal{V}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(C_1, D_0) \arrow[r, "\mathbb{C}(f,D_0)"] \arrow[d, "\mathbb{C}(C_1,g)"'] & \mathbb{C}(C_0, D_0) \arrow[d, "\mathbb{C}(C_0,g)"] \\ \mathbb{C}(C_1, D_1) \arrow[r, "\mathbb{C}(f,D_1)"'] & \mathbb{C}(C_0, D_1) \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Pour $\mathcal{V} = \mathbf{Ens}$, la fonction $\langle f, g\rangle$ envoie $d : C_1 \longrightarrow D_0$ sur le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "df"'] & C_1 \arrow[d, "gd"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ D_0 \arrow[r, "g"'] & D_1. \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Demander que $\langle f, g\rangle$ soit bijectif revient à demander que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & C_1 \arrow[d, "v"] \\ D_0 \arrow[r, "g"'] & D_1, \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

il existe un unique $d : C_1 \longrightarrow D_0$ tel que $gd = v$ et $df = u$, ce qui est bien la définition classique d'orthogonalité.

Remarquons aussi que la $\mathcal{V}$-orthogonalité implique l'orthogonalité dans la catégorie sous-jacente (qui revient à demander à ce que le diagramme 2.3 avec $\mathbb{C}$ remplacé par $\mathbb{C}_{\text{sj}}$ soit un produit fibré dans $\mathbf{Ens}$). En effet, $\mathcal{V}(I, \mathbb{C}(C, D)) = \mathbb{C}_{\text{sj}}(C, D)$ et le foncteur d'oubli $\mathcal{V}(I, -)$ étant représentable, il préserve le produit fibré. De plus, si $\mathcal{V}$ est complet et $\mathcal{V}(I, -)$ est conservatif (en particulier si $\mathcal{V}(I, -)$ est monadique), on a une équivalence entre les deux propriétés car un foncteur conservatif de domaine complet réfléchit les limites.

**Définition 2.3.** Si $\mathcal{W}$ est une classe de flèches de $\mathbb{C}$ (que l'on peut voir aussi comme une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fl}\mathbb{C}$), on pose

$$\mathcal{W}^{\uparrow} = \{f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}\mathcal{V} \mid \forall w \in \mathcal{W}, f \downarrow w\}; \tag{2.6}$$

$$\mathcal{W}^{\downarrow} = \{g \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}\mathcal{V} \mid \forall w \in \mathcal{W}, w \downarrow g\}. \tag{2.7}$$

**Propriétés 2.4.** *1. $(-)^{\uparrow}$ et $(-)^{\downarrow}$ renversent les inclusions entre classes de flèches de $\mathbb{C}$.*

*2. On a une adjonction*

$$\mathcal{W}^{\downarrow} \supseteq \mathcal{X} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}^{\uparrow}, \tag{2.8}$$

*et donc $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^{\uparrow\downarrow}$ et $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}^{\downarrow\uparrow}$; et aussi $\mathcal{X}^{\uparrow} = \mathcal{X}^{\uparrow\downarrow\uparrow}$ et $\mathcal{W}^{\downarrow} = \mathcal{W}^{\downarrow\uparrow\downarrow}$.*

**Définition 2.5.** 1. Une *paire orthogonale* (appelée *système de préfactorisation* dans [FK] puis [CJKP]) sur $\mathbb{C}$ est une paire $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de classes de flèches de $\mathbb{C}$ telle que
$$\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\uparrow} \text{ et } \mathcal{M} = \mathcal{E}^{\downarrow}. \tag{2.9}$$

2. Si $\mathcal{W}$ est une classe de flèches de $\mathbb{C}$, alors
$$(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (\mathcal{W}^{\downarrow\uparrow}, \mathcal{W}^{\downarrow}) \tag{2.10}$$
est une paire orthogonale, appelée la paire orthogonale *engendrée* par $\mathcal{W}$; on dit aussi que $\mathcal{W}$ *engendre* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.

3. Un *système de factorisation* sur $\mathbb{C}$ est une paire orthogonale $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ telle que pour tout $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$, il existe $e \in \mathcal{E}$ et $m \in \mathcal{M}$ tels que $f = m \circ e$.

**Proposition 2.6.** *Soit* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ *une paire orthogonale sur* $\mathbb{C}$.

1. $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \mathrm{isos}$;
2. $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{M}$ *sont stables sous composition;*
3. $gf$ *et* $g \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{M}$; $gf$ *et* $f \in \mathcal{E} \;\Rightarrow\; g \in \mathcal{E}$;

*Preuve.* 1. (a) Si $f$ est un iso, alors pour tout $g$, $f \downarrow g$ et $g \downarrow f$:
C'est le cas parce que tout carré commutatif dont deux côtés parallèles sont inversibles est un produit fibré.

(b) $f$ est un isomorphisme ssi $f \downarrow f$:
Si $f \downarrow f$, on voit que c'est un iso en constatant que les unités $u_C : I \longrightarrow \mathbb{C}(C, C)$ et $u_{C'} : I \longrightarrow \mathbb{C}(C', C')$ rivalisent avec le produit fibré de l'orthogonalité et en recueillant alors la flèche inverse de $f$ qui est la factorisation $I \longrightarrow \mathbb{C}(C', C)$.

De (a), on déduit que isos $\subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$ et de (b), on déduit l'autre inclusion.

2. Immédiat par les propriétés des produits fibrés.
3. Idem. □

**Remarque 2.7.** 1. Si $f \downarrow g$, il existe toujours une paire orthogonale$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ telle que $f \in \mathcal{E}$ et $g \in \mathcal{M}$, à savoir la paire orthogonale engendrée par $\{f\}$. Si l'on donne toutes les paires orthogonales d'une $\mathcal{V}$-catégorie, on donne aussi toutes les paires de flèches orthogonales, puisque deux morphismes ne peuvent être orthogonaux que dans le cadre rigide d'une paire orthogonale.

2. Une paire orthogonale est entièrement déterminée par la donnée d'une des deux classes, via les équations 2.9.
3. La paire orthogonale engendrée par $\mathcal{W}$ est la plus petite paire orthogonale $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ telle que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{E}$ (car $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}^{\downarrow\uparrow}$ et, si $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{E}$, alors $\mathcal{W}^{\downarrow\uparrow} \subseteq \mathcal{E}^{\downarrow\uparrow} = \mathcal{E}$).
4. On peut aussi définir, si $\mathcal{X}$ est une classe de flèches de $\mathbb{C}$, une paire orthogonale
$$(\mathcal{X}^{\uparrow}, \mathcal{X}^{\uparrow\downarrow}); \tag{2.11}$$
on dira que c'est la paire orthogonale "*coengendrée*" par $\mathcal{X}$.

Les paires orthogonales sur $\mathbb{C}$ forment un treillis complet, noté $\mathrm{PO}(\mathbb{C})$. L'ordre est donné par

$$(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0) \leq (\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1) \iff \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_1 \iff \mathcal{M}_0 \supseteq \mathcal{M}_1. \tag{2.12}$$

Le plus grand élément est $(\mathrm{tout}, \mathrm{isos})$ et le plus petit est $(\mathrm{isos}, \mathrm{tout})$; ce sont les systèmes de factorisation triviaux. Si $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de paires orthogonales, alors

$$\bigvee_{\alpha \in A} (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha) = ((\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha)^{\uparrow}, \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha) \tag{2.13}$$

(c'est la paire orthogonale engendrée par $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{E}_\alpha$), et

$$\bigwedge_{\alpha \in A} (\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{M}_\alpha) = (\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{E}_\alpha, (\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{E}_\alpha)^{\downarrow}), \tag{2.14}$$

qui est la paire orthogonale engendrée par $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{E}_\alpha$.

## 2.2 Orthogonalité "externe"

La propriété d'orthogonalité définie dans la section précédente était une relation entre deux flèches d'une même $\mathcal{V}$-catégorie, notion "interne" à la $\mathcal{V}$-catégorie. L'orthogonalité "externe" relie elle une flèche de $\mathcal{V}$ et une flèche d'une $\mathcal{V}$-catégorie donnée.

**Définition 2.8.** Soit $v \in \mathrm{Fl}\mathcal{V}$ et $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$. On dit que $v$ est *orthogonal* à $f$ (noté $v \downarrow f$) si pour tout $X \in \mathbb{C}$, $v \downarrow \mathbb{C}(X, f)$ dans $\mathcal{V}$.

**Lemme 2.9.** *Si $\mathbb{C}$ a tous les cotenseurs (et en particulier si $\mathbb{C} = \mathcal{V}$), si $v : V_0 \longrightarrow V_1$ dans $\mathcal{V}$ (que l'on peut voir comme un $\mathcal{V}$-foncteur $L\mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{V}$) et $f : C_0 \longrightarrow C_1$ dans $\mathbb{C}$ (qui est un $\mathcal{V}$-foncteur $L\mathbf{2} \longrightarrow \mathbb{C}$), alors le diagramme suivant est un produit fibré, où $\{v, f\}$ est la limite de $f$ pondérée par $v$.*

$$\begin{tikzcd}
\{v, f\} \arrow[r] \arrow[d] & {[V_0, C_0]} \arrow[d, "{[V_0, f]}"] \\
{[V_1, C_1]} \arrow[r, "{[v, C_1]}"'] & {[V_0, C_1]}
\end{tikzcd} \tag{2.15}$$

*Preuve.* Ce diagramme est un produit fibré si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(X, -)$ appliqué à ce diagramme est un produit fibré, par la proposition 1.4. Grâce à la propriété universelle du cotenseur, à la proposition 1.4 et à la proposition 2.1, cela se ramène à $\{v, \mathbb{C}(X, f)\} \cong \mathrm{Fl}\mathcal{V}(v, \mathbb{C}(X, f))$, ce qui est vrai (équation 1.19). □

Dans ce cas, il y a une flèche de comparaison

$$\langle v, f \rangle : [V_1, C_0] \longrightarrow \{v, f\}. \tag{2.16}$$

Bien sûr, si $\mathbb{C} = \mathcal{V}$, $\{v, f\} = [L\mathbf{2}, \mathcal{V}](v, f) = \mathrm{Fl}\mathcal{V}(v, f)$.

**Proposition 2.10.** *Si $\mathbb{C}$ a tous les cotenseurs (et en particulier si $\mathbb{C} = \mathcal{V}$), les trois conditions suivantes sont équivalentes, pour $v : V_0 \longrightarrow V_1$ dans $\mathcal{V}$ et $f : C_0 \longrightarrow C_1$ dans $\mathbb{C}$.*

1. *$v \downarrow f$;*
2. *le diagramme suivant est un produit fibré dans $\mathbb{C}_{\mathrm{sj}}$ (ou, de façon équivalente, dans $\mathbb{C}$);*

$$\begin{tikzcd} {[V_1, C_0]} \arrow[r, "{[v,C_0]}"] \arrow[d, "{[V_1,f]}"'] & {[V_0, C_0]} \arrow[d, "{[V_0,f]}"] \\ {[V_1, C_1]} \arrow[r, "{[v,C_1]}"'] & {[V_0, C_1]} \end{tikzcd} \tag{2.17}$$

3. *$\langle v, f\rangle$ est un isomorphisme $[V_1, C_0] \cong \{v, f\}$.*

*Preuve.* 2. et 3. sont évidemment équivalents. Pour prouver que 1. et 3. le sont également, considérons le diagramme commutatif suivant (il commute grâce à l'unicité de $\langle v, \mathbb{C}(X, f)\rangle$ et à la ($\mathcal{V}$-)naturalité des isomorphismes latéraux).

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(X, [V_1, C_0]) \arrow[r, "{\mathbb{C}(X,\langle v,f\rangle)}"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathbb{C}(X, \{v, f\}) \arrow[d, "\wr"] \\ {[V_1, \mathbb{C}(X, C_0)]} \arrow[r, "{\langle v,\mathbb{C}(X,f)\rangle}"'] & \{v, \mathbb{C}(X, f)\} \end{tikzcd} \tag{2.18}$$

On en déduit que $v \downarrow f$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{C}$, $v \downarrow \mathbb{C}(X, f)$, si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{C}$, $\langle v, \mathbb{C}(X, f)\rangle$ est un isomorphisme (par la définition 2.2), si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(X, \langle v, f\rangle)$ est un isomorphisme, si et seulement si $\langle v, f\rangle$ est un isomorphisme (le plongement de Yoneda est conservatif). $\square$

Remarquons qu'un corollaire de cette proposition est que si $\mathbb{C} = \mathcal{V}$, orthogonalités interne et externe coïncident. Si $\mathbb{C}$ a tous les tenseurs, il est possible d'exprimer l'orthogonalité externe en terme d'orthogonalité interne, ce qui est parfois très utile.

**Proposition 2.11.** *Si $\mathbb{C}$ a tous les tenseurs avec les objets de $\mathcal{V}$, et si $v \in \mathrm{Fl}\mathcal{V}$ et $c \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$, alors $v \downarrow f$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{C}$, $(v \otimes X) \downarrow f$ dans $\mathbb{C}$ (orthogonalité interne).*

*Preuve.* Il s'agit donc de prouver l'équivalence

$$v \downarrow \mathbb{C}(X, f) \Leftrightarrow (v \otimes X) \downarrow f. \tag{2.19}$$

Par la définition du tenseur ($\mathbb{C}(V \otimes X, C) \cong [V, \mathbb{C}(X, C)]$), les produits fibrés exprimant ces deux propriétés sont isomorphes. $\square$

**Définition 2.12.** Si $\mathcal{W}$ est une classe de flèches de $\mathcal{V}$, on pose

$$\mathcal{W}^{\downarrow^{\mathbb{C}}} = \{f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C} \,|\, \forall w \in \mathcal{W}, w \downarrow f\}. \tag{2.20}$$

L'opération $(-)^{\downarrow^{\mathbb{C}}}$ renverse l'ordre.

Si $\mathbb{C}$ a tous les tenseurs, on peut noter $\mathcal{W} \otimes \mathbb{C} = \{w \otimes X \,|\, w \in \mathcal{W},\ X \in \mathbb{C}\}$. Alors par la proposition 2.11, la définition précédente peut se réécrire en terme d'orthogonalité interne:

$$\mathcal{W}^{\downarrow^{\mathbb{C}}} = (\mathcal{W} \otimes \mathbb{C})^{\downarrow}. \tag{2.21}$$

## 2.3 $\mathcal{M}$-morphismes

Fixons une paire orthogonale $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sur $\mathcal{V}$. Il est possible de définir une notion de monomorphisme relative à $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ dans une $\mathcal{V}$-catégorie. Cette notion sera une généralisation de la classe $\mathcal{M}$ à toutes les $\mathcal{V}$-catégories, d'où le nom de $\mathcal{M}$-morphisme.

**Définition 2.13.** $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$ est un $\mathcal{M}$-*morphisme* si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(X, f) \in \mathcal{M}$. Notons $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ la classe des $\mathcal{M}$-morphismes dans $\mathbb{C}$.

Il est clair que dans le cas où $\mathcal{V} =$ **Ens** ou **Ab**, un (injections)-morphisme est tout simplement un monomorphisme.

**Proposition 2.14.**

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}^{\downarrow^{\mathbb{C}}}. \tag{2.22}$$

*Autrement dit,* $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$ *est un* $\mathcal{M}$-*morphisme si et seulement si pour tout* $e \in \mathcal{E}$*,* $e \downarrow f$*.*

*Preuve.* $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ ssi pour tout $X \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(X, f) \in \mathcal{M}$, ssi pour tout $e \in \mathcal{E}$, pour tout $X \in \mathbb{C}$, $e \downarrow \mathbb{C}(X, f)$, ssi pour tout $e \in \mathcal{E}$, $e \downarrow f$. □

En particulier, dans $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{V}} = \mathcal{M}$. Si la paire orthogonale est engendrée par une partie de $\mathcal{E}$, alors on peut utiliser le critère 2.14 en testant l'orthogonalité de $f$ avec les seuls éléments de la partie génératrice. Plusieurs exemples de ce phénomène se trouvent à la fin du chapitre.

**Proposition 2.15.** *Si* $\mathcal{W}$ *engendre* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$*, alors* $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathcal{W}^{\downarrow^{\mathbb{C}}}$*, c'est-à-dire une flèche* $f$ *de* $\mathbb{C}$ *est un* $\mathcal{M}$-*morphisme si et seulement si pour tout* $e \in \mathcal{W}$*,* $e \downarrow f$*.*

*Preuve.* Il suffit de prouver, pour tout $X \in \mathbb{C}$, que pour tout $e \in \mathcal{W}$, $e \downarrow \mathbb{C}(X, f)$ (c'est-à-dire $\mathbb{C}(X, f) \in \mathcal{W}^{\downarrow}$) si et seulement si pour tout $e \in \mathcal{E}$, $e \downarrow \mathbb{C}(X, f)$ (c'est-à-dire $\mathbb{C}(X, f) \in \mathcal{E}^{\downarrow}$). C'est bien le cas car $\mathcal{E}^{\downarrow} = \mathcal{W}^{\downarrow\uparrow\downarrow} = \mathcal{W}^{\downarrow}$. □

**Définition 2.16.** $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$ est un $\mathcal{E}$-*morphisme fort* si pour tout $m \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, $f \downarrow m$, dans le sens interne à $\mathbb{C}$. Notons $\mathcal{E}^{\mathrm{fort}}_{\mathbb{C}} = \mathcal{M}^{\uparrow}_{\mathbb{C}}$ la classe des $\mathcal{E}$-morphismes forts dans $\mathbb{C}$.

Dans $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}^{\mathrm{fort}}_{\mathcal{V}} = \mathcal{M}^{\uparrow} = \mathcal{E}$.

**Proposition 2.17.** *Si* $\mathbb{C}$ *a tous les tenseurs, alors* $(\mathcal{E}^{\mathrm{fort}}_{\mathbb{C}}, \mathcal{M}_{\mathbb{C}})$ *est une paire orthogonale sur* $\mathbb{C}$*.*

*Preuve.* Par les équations 2.21 et 2.22, c'est la paire orthogonale engendrée par $\mathcal{E} \otimes \mathbb{C}$. □

On en déduit que les $\mathcal{M}$-morphismes et les $\mathcal{E}$-morphismes forts jouissent des propriétés décrites dans la proposition 2.6.

## 2.4 Paires orthogonales définissables

Dans la section précédente, on a vu ($\mathcal{M}_{\mathcal{V}} = \mathcal{M}$) que l'on a toujours, si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est une paire orthogonale sur $\mathcal{V}$,

$$m \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \text{ pour tout } X \in \mathcal{V},\ [X, m] \in \mathcal{M}. \tag{2.23}$$

La définition de $\mathcal{M}$-morphisme est une généralisation de cette propriété à toutes les $\mathcal{V}$-catégories. On voudrait définir une notion d'épimorphisme dépendant de $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, et appelée "$\mathcal{E}$-morphisme", d'une façon analogue. On sait que si $\mathcal{V} =$ **Ens**, $e \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$ est un épimorphisme ssi pour tout $Y \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(e, Y) \in \{\text{injections}\}$. Pour qu'une telle définition fonctionne en général, il faudrait que pour toute paire orthogonale $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sur $\mathcal{V}$, $e \in \mathcal{E}$ ssi pour tout $Y \in \mathcal{V}$, $[e, Y] \in \mathcal{M}$. Mais cela n'est pas vrai en général, comme le montre l'exemple $(\text{tout}, \text{isos})$. Pour pouvoir définir les $\mathcal{E}$-morphismes, nous allons devoir exiger que $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ soit définissable, au sens de la définition suivante.

**Définition 2.18.** Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ une paire orthogonale sur $\mathcal{V}$. Une autre paire orthogonale $(\mathcal{E}', \mathcal{M}')$ *définit* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ si

$$e \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \text{ pour tout } Y \in \mathcal{V},\ [e, Y] \in \mathcal{M}'; \tag{2.24}$$

on dit, s'il existe une telle paire $(\mathcal{E}', \mathcal{M}')$ qui définit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, que $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est *définissable.*

Dans **Ens** et **Ab**, la paire $(\text{surjections}, \text{injections})$ se définit elle-même; par contre, la paire $(\mathcal{E}_\emptyset, \mathcal{M}_\emptyset)$ (définie dans la section 2.9) n'est pas définissable. Comme indiqué dans l'introduction et détaillé à la fin de ce chapitre, dans la 2-catégorie **CGS**, les deux systèmes de factorisation (foncteurs essentiellement surjectifs, foncteurs pleins et fidèles) et (foncteurs pleins et essentiellement surjectifs, foncteurs fidèles) se définissent l'un l'autre.

Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est une paire orthogonale fixée, il peut y avoir plusieurs $(\mathcal{E}', \mathcal{M}')$ qui définissent $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, et en général les notions de $\mathcal{E}$-morphismes que chacune détermine ne sont pas équivalentes (un contre-exemple se trouve à la fin du chapitre, pour $\mathcal{V} =$ **Ens**), toutes ces définitions coïncidant bien sûr pour $\mathbb{C} = \mathcal{V}$. Il va donc falloir choisir une des paires orthogonales qui définissent $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$. C'est la plus grande d'entre elles, qui a la propriété d'être elle-même définie par $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, qui va servir à définir les $\mathcal{E}$-morphismes. Mais il faut tout d'abord étudier la coorthogonalité.

## 2.5 Coorthogonalité

La coorthogonalité ("externe") est la notion duale de l'orthogonalité "externe" de la définition 2.8.

**Définition 2.19.** Soit $v \in \mathrm{Fl}\mathcal{V}$ et $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$. On dit que $v$ est *coorthogonal* à $f$ (noté $v \wr f$) si pour tout $Y \in \mathbb{C}$, $v \downarrow \mathbb{C}(f, Y)$ dans $\mathcal{V}$.

**Lemme 2.20.** *Si $\mathbb{C}$ a tous les tenseurs (et en particulier si $\mathbb{C} = \mathcal{V}$), si $v : V_0 \longrightarrow V_1$ est dans $\mathcal{V}$ et $f : C_0 \longrightarrow C_1$ est dans $\mathbb{C}$, alors le diagramme suivant est un coproduit fibré, où $v \star f$ est la colimite de $f$ pondérée par $v$ (considérées comme des $\mathcal{V}$-foncteurs: $f : \mathbf{L2}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $v : \mathbf{L2} \longrightarrow \mathcal{V}$).*

$$\begin{tikzcd} v \star f & V_0 \otimes C_1 \arrow[l] \\ V_1 \otimes C_0 \arrow[u] & V_0 \otimes C_0 \arrow[l, "v \otimes C_0"'] \arrow[u, "V_0 \otimes f"'] \end{tikzcd} \tag{2.25}$$

*Preuve.* C'est la proposition duale du lemme 2.9. □

On a donc une flèche de comparaison

$$v \diamond f : v \star f \longrightarrow V_1 \otimes C_1, \tag{2.26}$$

qui, dans le cas $\mathbb{C} = \mathcal{V}$, est appelée dans [Hov] "pushout product" de $v$ et $f$. Il y est indiqué que ce produit fait de $\mathrm{Fl}\mathcal{V}_{\mathrm{sj}}$ une catégorie monoïdale, avec comme Hom interne de $v$ vers $f$, la flèche de comparaison $\langle v, f \rangle$ décrite plus haut. Mais en fait, ce n'est qu'une catégorie "semigroupale", car l'identité sur $I$ ne peut être l'unité de ce produit tensoriel.

**Proposition 2.21.** *Si $\mathbb{C}$ a les tenseurs avec tous les objets de $\mathcal{V}$ (et en particulier si $\mathbb{C} = \mathcal{V}$), alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *$v \wr f$;*
2. *le diagramme suivant est un coproduit fibré (dans $\mathbb{C}_{\mathrm{sj}}$ ou dans $\mathbb{C}$);*

$$\begin{tikzcd} V_1 \otimes C_1 & V_0 \otimes C_1 \arrow[l, "v \otimes C_1"'] \\ V_1 \otimes C_0 \arrow[u, "V_1 \otimes f"] & V_0 \otimes C_0 \arrow[l, "v \otimes C_0"] \arrow[u, "V_0 \otimes f"'] \end{tikzcd} \tag{2.27}$$

3. *$v \diamond f$ est un isomorphisme $v \star f \cong V_0 \otimes C_1$.*

*Preuve.* C'est la proposition duale de 2.10. On utilise ici la commutativité du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(V_1 \otimes C_1, Y) \arrow[r, "\mathbb{C}(v \diamond f, Y)"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathbb{C}(v \star f, Y) \arrow[d, "\wr"] \\ {[V_1, \mathbb{C}(C_1, Y)]} \arrow[r, "\langle v, \mathbb{C}(f, Y) \rangle"'] & \{v, \mathbb{C}(f, Y)\} \end{tikzcd} \tag{2.28}$$

□

Si $\mathbb{C}$ a tous les cotenseurs, la coorthogonalité (externe) peut s'exprimer en termes d'orthogonalité interne à $\mathbb{C}$.

**Proposition 2.22.** *Si $\mathbb{C}$ a tous les cotenseurs avec les objets de $\mathcal{V}$, et si $v \in \mathrm{Fl}\mathcal{V}$ et $c \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$, alors $v \wr f$ si et seulement si pour tout $Y \in \mathbb{C}$, $f \downarrow [v, Y]$ dans $\mathbb{C}$ (orthogonalité interne).*

*Preuve.* C'est la duale de 2.11:

$$v \downarrow \mathbb{C}(f, Y) \Leftrightarrow f \downarrow [v, Y]. \tag{2.29}$$

□

**Définition 2.23.** Si $\mathcal{W}$ est une classe de flèches de $\mathcal{V}$, on pose

$$\mathcal{W}^{\wr^{\mathbb{C}}} = \{f \text{ flèche de } \mathcal{V} \,|\, \forall w \in \mathcal{W}, w \wr f\}. \tag{2.30}$$

Si $\mathbb{C}$ a tous les cotenseurs, on peut noter $[\mathcal{W}, \mathbb{C}] = \{[w, Y] \,|\, w \in \mathcal{W},\ Y \in \mathbb{C}\}$. Alors par la proposition 2.22, la définition précédente peut se réécrire en terme d'orthogonalité interne:

$$\mathcal{W}^{\wr^{\mathbb{C}}} = [\mathcal{W}, \mathbb{C}]^{\uparrow}. \tag{2.31}$$

Regardons maintenant la coorthogonalité dans $\mathbb{C} = \mathcal{V}$. Nous noterons alors simplement ${}^{\wr}$ au lieu de ${}^{\wr^{\mathbb{C}}}$. Une première remarque est que par la symétrie de $\otimes$, $f \wr g$ ssi $g \wr f$ (pour prouver cela, on peut utiliser la proposition 2.22).

**Proposition 2.24.** *1. $(-)^{\wr}$ renverse l'inclusion des classes de flèches;*

*2. On a une adjonction*

$$\mathcal{W}^{\wr} \supseteq \mathcal{X} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}^{\wr}, \tag{2.32}$$

*et donc $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}^{\wr\wr}$ et $\mathcal{W}^{\wr} = \mathcal{W}^{\wr\wr\wr}$.*

Cela permet de faire une définition analogue à celle de paire orthogonale.

**Définition 2.25.** Deux paires orthogonales $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ et $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ sont *couplées* si

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1^{\wr} \text{ et } \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0^{\wr}. \tag{2.33}$$

Si $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ est couplée avec une autre paire orthogonale, celle-ci est uniquement déterminée par les équations 2.33. Dans toute catégorie autonome, les systèmes de factorisation (tout,isos) et (isos, tout) sont couplées; dans **CGS**, les deux systèmes de factorisation rappelés plus haut sont couplés; dans **Ens** et **Ab**, le système de factorisation (surjections, injections) est couplé avec lui-même.

On aurait pu faire la définition suivante: une *paire coorthogonale* dans $\mathcal{V}$ est une paire $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ de classes de flèches de $\mathcal{V}$ vérifiant les équations 2.33. En fait les paires coorthogonales ainsi définies correspondent exactement aux paires de paires orthogonales couplées, car si $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ est une paire coorthogonale, alors $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0^{\downarrow})$ et $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1^{\downarrow})$ sont des paires orthogonales, bien entendu couplées. En effet, par l'équation 2.31, $\mathcal{E}_0 = [\mathcal{E}_1, \mathcal{V}]^{\uparrow}$ et donc $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0^{\downarrow})$ est la paire orthogonale "coengendrée" par $[\mathcal{E}_1, \mathcal{V}]$.

La fonction $(-)^{\wr}$ s'étend en une fonction inversant l'ordre de $\mathrm{PO}(\mathcal{V})$ vers lui-même:

$$(-)^{\bullet} : \mathrm{PO}(\mathcal{V})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{PO}(\mathcal{V}) : (\mathcal{E}, \mathcal{M}) \mapsto (\mathcal{E}^{\bullet}, \mathcal{M}^{\bullet}) = (\mathcal{E}^{\wr}, \mathcal{E}^{\wr\downarrow}), \tag{2.34}$$

qui est bien une paire orthogonale, par le même argument que dans le paragraphe précédent. La paire orthogonale $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$ est appelée la paire *associée* à $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$. On a alors une adjonction (qui découle de celle de $(-)^\wr$):

$$(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1) \leq (\mathcal{E}_0^\bullet, \mathcal{M}_0^\bullet) \Leftrightarrow (\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0) \leq (\mathcal{E}_1^\bullet, \mathcal{M}_1^\bullet). \tag{2.35}$$

Cette adjonction induit une monade $(-)^{\bullet\bullet} : \mathrm{PO}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathrm{PO}(\mathcal{V})$; en particulier $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \leq (\mathcal{E}^{\bullet\bullet}, \mathcal{M}^{\bullet\bullet})$.

## 2.6 Paires orthogonales couplées et définissables

**Lemme 2.26.** *Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est une paire orthogonale sur $\mathcal{V}$, alors*

$$f \in \mathcal{E}^{\wr^{\mathbb{C}}} \;\Leftrightarrow\; \forall Y \in \mathbb{C},\; \mathbb{C}(f, Y) \in \mathcal{M}. \tag{2.36}$$

*Preuve.* C'est le dual de la proposition 2.14. □

Ce lemme sera d'abord utilisé dans le cas où $\mathbb{C} = \mathcal{V}$.

**Corollaire 2.27.** *Soit $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ et $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ deux paires orthogonales sur $\mathcal{V}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *$(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ définit $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$;*
2. *$(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0) = (\mathcal{E}_1^\bullet, \mathcal{M}_1^\bullet)$ (ce qui revient à $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1^\wr$).*

*Dès lors $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ et $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ sont couplées si et seulement si elles se définissent l'une l'autre, c'est-à-dire si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

– $v \in \mathcal{E}_0 \;\Leftrightarrow\; \forall V \in \mathcal{V},\; [v, V] \in \mathcal{M}_1$;
– $v \in \mathcal{E}_1 \;\Leftrightarrow\; \forall V \in \mathcal{V},\; [v, V] \in \mathcal{M}_0$.

Du début de ce corollaire on déduit que $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ définit toujours $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$. La proposition suivante rassemble toutes les notions qui viennent d'être introduites.

**Proposition 2.28.** *Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ une paire orthogonale sur $\mathcal{V}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable;*
2. *$e \in \mathcal{E}$ ssi pour tout $Y \in \mathcal{V}$, $[e, Y] \in \mathcal{M}^\bullet$ (autrement dit $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$ définit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$);*
3. *$(\mathcal{E}^{\bullet\bullet}, \mathcal{M}^{\bullet\bullet}) = (\mathcal{E}, \mathcal{M})$ (c'est-à-dire la paire $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est fermée pour la monade $(-)^{\bullet\bullet}$);*
4. *il existe une paire orthogonale $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ telle que $(\mathcal{E}_1^\bullet, \mathcal{M}_1^\bullet) = (\mathcal{E}, \mathcal{M})$;*
5. *il existe une paire orthogonale avec laquelle $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est couplé.*
6. *$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est couplé avec $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$;*

*Preuve.* **1 $\Leftrightarrow$ 4.** Immédiat par le corollaire 2.27.

**3 $\Rightarrow$ 4.** Trivial.

**4 $\Rightarrow$ 3.** Grâce à la proposition 2.24, $(\mathcal{E}^{\bullet\bullet}, \mathcal{M}^{\bullet\bullet}) = (\mathcal{E}_1^{\bullet\bullet\bullet}, \mathcal{M}_1^{\bullet\bullet\bullet}) = (\mathcal{E}_1^\bullet, \mathcal{E}_1^\bullet) = (\mathcal{E}, \mathcal{M})$.

**3 $\Leftrightarrow$ 6.** Trivial.

**5 $\Leftrightarrow$ 6.** Par définition de paires couplées, si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est couplé, c'est avec $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$.

**2 $\Leftrightarrow$ 6.** Par le corollaire 2.27 et le fait que $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ définit toujours $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$. □

**Proposition 2.29.** *1. Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable, son associée $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$ est la seule paire orthogonale qui définit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ et qui est aussi définie par $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$; c'est aussi la plus grande paire orthogonale qui définit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.*

*2. Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est une paire orthogonale quelconque, $(\mathcal{E}^{\bullet\bullet}, \mathcal{M}^{\bullet\bullet})$ est la plus petite paire orthogonale définissable contenant $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ (c'est la fermeture de $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ pour la monade $(-)^{\bullet\bullet}$).*

*Preuve.* 1. C'est la plus grande parce que si $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ définit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, alors $\mathcal{E}_1^\wr = \mathcal{E}$ et donc $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}^\wr = \mathcal{E}^\bullet$. □

Une paire orthogonale $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sera dite *fixe* si $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet) = (\mathcal{E}, \mathcal{M})$, ou, ce qui revient au même, si elle est couplée avec elle-même (comme (surjections, injections) sur **Ens** ou **Ab**).

## 2.7 $\mathcal{E}$-morphismes

Voici enfin la définition des $\mathcal{E}$-morphismes.

**Définition 2.30.** Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ une paire orthogonale définissable. Un morphisme $f$ dans $\mathbb{C}$ est appelé un *$\mathcal{E}$-morphisme* si et seulement si pour tout $Y \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(f, Y) \in \mathcal{M}^\bullet$. Notons $\mathcal{E}_\mathbb{C}$ la classe des $\mathcal{E}$-morphismes dans $\mathbb{C}$.

Étant donné que $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$ définit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, $\mathcal{E}_\mathcal{V} = \mathcal{E}$. Il est clair que dans le cas où $\mathcal{V} =$ **Ens** ou **Ab**, un (surjections)-morphisme est tout simplement un monomorphisme, puisque (surjections, injections) se définit elle-même. Voici l'analogue de la proposition 2.14 pour les $\mathcal{E}$-morphismes.

**Proposition 2.31.** *Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable, alors*

$$\mathcal{E}_\mathbb{C} = \mathcal{E}^{\bullet \wr^\mathbb{C}}. \tag{2.37}$$

*Autrement dit, $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$ est un $\mathcal{E}$-morphisme si et seulement si pour tout $e \in \mathcal{E}^\bullet$, $e \wr f$.*

*Preuve.* Immédiat par le lemme 2.26. □

Tout comme pour les $\mathcal{M}$-morphismes, pour vérifier qu'une flèche est un $\mathcal{E}$-morphisme, il suffit de tester la coorthogonalité de cette flèche avec les éléments d'une classe de flèches de $\mathcal{V}$ qui engendre $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$.

**Proposition 2.32.** *Si $\mathcal{X}$ engendre $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$, alors $\mathcal{E}_\mathbb{C} = \mathcal{X}^{\wr^\mathbb{C}}$, c'est-à-dire une flèche $f$ de $\mathbb{C}$ est un $\mathcal{E}$-morphisme si et seulement si pour tout $e \in \mathcal{X}$, $e \wr f$.*

*Preuve.* Tout à fait similaire à celle de la proposition 2.15. □

**Définition 2.33.** Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable, $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$ est appelé un *$\mathcal{M}$-morphisme fort* si pour tout $e \in \mathcal{E}_\mathbb{C}$, $e \downarrow f$. Notons $\mathcal{M}_\mathbb{C}^{\mathrm{fort}} = \mathcal{E}_\mathbb{C}^\downarrow$ la classe des $\mathcal{M}$-morphismes forts dans $\mathbb{C}$.

Dans $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}_\mathcal{V}^{\mathrm{fort}} = \mathcal{M}_\mathcal{V} = \mathcal{M}$.

**Proposition 2.34.** *Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable et si $\mathbb{C}$ a tous les cotenseurs, alors $(\mathcal{E}_\mathbb{C}, \mathcal{M}_\mathbb{C}^{\mathrm{fort}})$ est une paire orthogonale sur $\mathbb{C}$.*

*Preuve.* Par les équations 2.31 et 2.37, c'est la paire orthogonale "coengendrée" par $[\mathcal{E}^\bullet, \mathbb{C}]$. □

On en déduit que les $\mathcal{E}$-morphismes et les $\mathcal{M}$-morphismes forts jouissent des propriétés décrites dans la proposition 2.6.

**Proposition 2.35.** *Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable, alors*

1. *si $\mathbb{C}$ a tous les tenseurs, tout $\mathcal{M}$-morphisme fort est un $\mathcal{M}$-morphisme;*
2. *si $\mathbb{C}$ a tous les cotenseurs, tout $\mathcal{E}$-morphisme fort est un $\mathcal{E}$-morphisme.*

*Dès lors, si $\mathbb{C}$ a tous les tenseurs et tous les cotenseurs, dans* PO($\mathbb{C}$)*,*

$$(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\text{fort}}, \mathcal{M}_{\mathbb{C}}) \leq (\mathcal{E}_{\mathbb{C}}, \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{\text{fort}}). \tag{2.38}$$

*Preuve.* Prouvons le point 2., c'est-à-dire $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\text{fort}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$; le point 1. se prouve de manière duale. En utilisant l'équation 2.31, cela se réécrit comme

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{\uparrow} \subseteq [\mathcal{E}^\bullet, \mathbb{C}]^{\uparrow}. \tag{2.39}$$

Il suffit donc de prouver que $[\mathcal{E}^\bullet, \mathbb{C}] \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire que pour tout $e \in \mathcal{E}^\bullet$, pour tout $Y \in \mathbb{C}$ et pour tout $X \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(X, [e, Y]) \in \mathcal{M}$. Dans Fl$\mathcal{V}$, cette dernière flèche est isomorphe à $[e, \mathbb{C}(X, Y)]$, qui appartient à $\mathcal{M}$, car $e \in \mathcal{E}^\bullet$. □

**Remarque 2.36.**

1. Les deux paires orthogonales de l'inéquation 2.39 coïncident dans $\mathcal{V}$ avec $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$. Il sera question à la fin du chapitre 3. des $\mathcal{V}$-catégories où ces deux paires orthogonales coïncident également (et sont des systèmes de factorisation).
2. On peut maintenant faire la définition suivante: une paire orthogonale (ou un système de factorisation) $(\mathcal{E}', \mathcal{M}')$ sur $\mathbb{C}$ est $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-*propre* si $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ et si $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$. Pour $\mathcal{V} = \mathbf{Ens}$ et le système surjections-injections, on retrouve la définition usuelle de système de factorisation propre. Pour $\mathcal{V} = \mathbf{Cat}$, cela donne un certain éclairage aux diverses définition de système de factorisation propre sur une 2-catégorie présentées dans [DV].

## 2.8 Résumé

Rappelons que

1. $f$ est un $\mathcal{M}$-morphisme dans $\mathbb{C}$ ($f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$)
   $\Leftrightarrow$ $\forall e \in \mathcal{E}$, $e \downarrow f$ dans $\mathbb{C}$
   $\Leftrightarrow$ $\forall X \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(X, f) \in \mathcal{M}$;
2. si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable,
   $f$ est un $\mathcal{E}$-morphisme dans $\mathbb{C}$ ($f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$)
   $\Leftrightarrow$ $\forall e \in \mathcal{E}^\bullet$, $e \wr f$ dans $\mathbb{C}$
   $\Leftrightarrow$ $\forall Y \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(f, Y) \in \mathcal{M}^\bullet$;

En particulier, $\mathcal{M}_{\mathcal{V}} = \mathcal{M}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{V}} = \mathcal{E}$. Il est important de remarquer que le dual d'un $\mathcal{M}$-morphisme (c'est-à-dire un $\mathcal{M}$-morphisme dans $\mathbb{C}^{\text{op}}$) est un $\mathcal{E}^\bullet$-morphisme, et que le dual d'un $\mathcal{E}$-morphisme est un $\mathcal{M}^\bullet$-morphisme:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathbb{C}^{\text{op}}} &= \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^\bullet; \\ \mathcal{E}_{\mathbb{C}^{\text{op}}} &= \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^\bullet. \end{aligned} \tag{2.40}$$

## 2.9 Exemples

### 2.9.1 Ens

La situation de la catégorie **Ens** est parfaitement connue. Il y a exactement 4 paires orthogonales (comme indiqué dans [CHK]), qui sont toutes des systèmes de factorisation:

$$(\text{isos}, \text{tout}) < (\text{surjections}, \text{injections}) < (\mathcal{E}_\emptyset, \mathcal{M}_\emptyset) < (\text{tout}, \text{isos}). \tag{2.41}$$

Le troisième système de factorisation est le seul qu'il est nécessaire de présenter. Les deux classes sont définies ainsi:

$$\mathcal{E}_\emptyset = \text{isos} \cup \{\emptyset \longrightarrow X \mid X \in \mathbf{Ens}\};$$
$$\mathcal{M}_\emptyset = \text{tout} \setminus \{\emptyset \longrightarrow X \mid X \neq \emptyset\}.$$

Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est factorisée, si $X = \emptyset$, en $f = f \circ 1_\emptyset$ et sinon, en $f = 1_Y \circ f$. Cette construction donne un système de factorisation dans n'importe quelle catégorie avec un objet initial strict.

Les deux premiers et le dernier systèmes sont définissables, les deux extrêmes étant couplés ensemble et le deuxième étant fixe. Le fait que (surjections, injections) est couplé avec lui-même est bien connu; il signifie simplement qu'une fonction $f : A \longrightarrow B$ est une surjection ssi pour tout ensemble $Y$, $- \circ f : Y^B \longrightarrow Y^A$ est une injection, autrement dit ssi $f$ est un épimorphisme. L'équivalence 2.23 signifie ici qu'une fonction $f : A \longrightarrow B$ est une injection ssi pour tout ensemble $X$, $f \circ - : A^X \longrightarrow B^X$ est une injection, autrement dit ssi $f$ est un monomorphisme.

Le système de factorisation $(\mathcal{E}_\emptyset, \mathcal{M}_\emptyset)$ n'est pas définissable puisqu'il ne reste aucune paire orthogonale avec laquelle il aurait pu être couplé; son associé est la plus petite paire orthogonale définissable qui le contient, c'est-à-dire $(\text{tout}, \text{isos})$. Tout comme son associé, $(\mathcal{E}_\emptyset, \mathcal{M}_\emptyset)$ définit $(\text{isos}, \text{tout})$; mais les "isos-morphismes" que l'on pourrait définir à partir de $(\mathcal{E}_\emptyset, \mathcal{M}_\emptyset)$ ne sont pas les mêmes que ceux que l'on définit à partir de $(\text{tout}, \text{isos})$, qui sont à proprement parler les isos-morphismes et qui ne sont autres que les isomorphismes (en un mot cette fois). En effet, dans la catégorie **2**, l'unique flèche non identité $\alpha : 0 \longrightarrow 1$ est telle que pour tout $i = 0, 1$, $\mathbf{2}(\alpha, i) \in \mathcal{M}_\emptyset$, mais $\alpha$ n'est pas un isomorphisme. Ceci montre qu'il est nécessaire de choisir une des paires orthogonales qui définissent $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ pour définir les $\mathcal{E}$-morphismes.

En général, de manière semblable à la remarque 2.7, si $f \wr g$ dans $\mathcal{V}$, il existe une "paire coorthogonale" $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ telle que $f \in \mathcal{E}_0$ et $g \in \mathcal{E}_1$. Dès lors, dans **Ens**, on peut dire que $f \wr g$ si et seulement si on est dans l'un des trois cas suivants: 1) $f$ et $g$ sont surjectifs, 2) $f$ est bijectif ou 3) $g$ est bijectif.

Cette remarque peut donner une certaine idée de la coorthogonalité: $f \wr g$ si $f$ et $g$ sont suffisamment surjectifs, un manque de surjectivité de l'un étant compensé par un regain de surjectivité de l'autre. Dans le tableau suivant, où $f$ règne sur la colonne de gauche, et $g$, sur celle de droite, il faut imaginer que d'un crayon violet ait été recouvertes (à partir du haut pour la première colonne; à partir du bas pour la seconde) les propriétés vérifiées respectivement par $f$ et $g$. Pour que l'on ait $f \wr g$, il faut que les zones violettes des deux colonnes se rejoignent ou se dépassent.

| $f$ | $g$ |
|---|---|
| surjectif | injectif |
| injectif | surjectif |

Dans le cas de **CGS** (voir la section suivante), la situation devrait être ainsi:

| $f$ | $g$ |
|---|---|
| essentiellement surjectif | fidèle |
| plein | plein |
| fidèle | essentiellement surjectif |

Pour l'orthogonalité, la situation est duale (ce qui revient à remettre la colonne de droite à l'endroit); pour que $f \downarrow g$, il faut que $f$ soit suffisamment surjectif et $g$ suffisamment injectif, un manque d'un côté étant compensé de l'autre. (Dans le tableau suivant, il faudrait en fait ajouter une ligne due à $(\mathcal{E}_\emptyset, \mathcal{M}_\emptyset)$.)

| $f$ | $g$ |
|---|---|
| surjectif | surjectif |
| injectif | injectif |

Par quoi sont engendrés les systèmes de factorisation sur **Ens**? $(\text{isos}, \text{tout})$ est engendré par n'importe quelle bijection; $(\text{surjections}, \text{injections})$ est engendré par n'importe quelle surjection non bijective, et en particulier par la fonction $!_2 : 2 \longrightarrow 1$; $(\mathcal{E}_\emptyset, \mathcal{M}_\emptyset)$ est engendré par n'importe quelle fonction de domaine non vide et non surjective; $(\text{tout}, \text{isos})$ est engendré par n'importe quelle fonction de domaine vide et de codomaine non vide. Tout cela est évident si l'on pense que la paire orthogonale engendrée par une classe de flèches $\mathcal{W}$ est la plus petite paire orthogonale $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ telle que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{E}$.

En utilisant la proposition 2.15, on voit qu'une flèche $f : X_0 \longrightarrow X_1$ dans une catégorie avec produits binaires (qui sont les cotenseurs avec 2) est un injections-morphisme (c'est-à-dire un monomorphisme) si et seulement si $!_2 \downarrow f$, c'est-à-dire ssi le diagramme suivant est un produit fibré.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\Delta_{X_0}"] \arrow[d, "f"'] & X_0 \times X_0 \arrow[d, "f \times f"] \\ X_1 \arrow[r, "\Delta_{X_1}"'] & X_1 \times X_1 \end{tikzcd} \tag{2.42}$$

De la même façon, par 2.32 si $\mathbb{C}$ a les coproduits binaires (les tenseurs avec 2), une flèche $f : X_0 \longrightarrow X_1$ est un surjections-morphisme (épimorphisme) si et seulement si $!_2 \wr f$, c'est-à-dire ssi le diagramme suivant est un coproduit fibré.

$$\begin{tikzcd} X_0 \amalg X_0 \arrow[r, "\nabla_{X_0}"] \arrow[d, "f \amalg f"'] & X_0 \arrow[d, "f"] \\ X_1 \amalg X_1 \arrow[r, "\nabla_{X_1}"'] & X_1 \end{tikzcd} \tag{2.43}$$

### 2.9.2 Ab

Dans **Ab**, il y a au moins trois système de factorisation définissables:

$$(\text{isos}, \text{tout}) < (\text{surjections}, \text{injections}) < (\text{tout}, \text{isos}). \tag{2.44}$$

Les deux extrêmes sont bien entendu couplés et $(\text{surjections}, \text{injections})$ est fixe; ce dernier système est engendré par toute surjection non bijective, en particulier par $!_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow 0$.

En utilisant la proposition 2.15, on voit qu'une flèche $g : G_0 \longrightarrow G_1$ dans une **Ab**-catégorie avec objet zéro est un injections-morphisme (c'est-à-dire un monomorphisme) si et seulement si $!_{\mathbb{Z}} \downarrow g$, c'est-à-dire ssi le diagramme suivant est un produit fibré, c'est-à-dire ssi $\operatorname{Ker} g = 0$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r] & G_1 \end{tikzcd} \tag{2.45}$$

Et par la proposition 2.32, une flèche $g : G_0 \longrightarrow G_1$ dans une **Ab**-catégorie avec objet zéro est un surjections-morphisme (c'est-à-dire un épimorphisme) si et seulement si $!_{\mathbb{Z}} \wr g$, ce qui revient à $\operatorname{Coker} g = 0$.

## 2.10 2-Exemples et autre

Les “2-exemples” sont les exemples de ce qui serait une version 2-catégorielle (dans le cadre des 2-catégories enrichies dans une 2-catégorie monoïdale ...) de ce travail. Dans **CGS** et dans **Cat**, la $\mathcal{V}$-orthogonalité est exactement l'orthogonalité dans les 2-catégories sous-jacentes, comme elle est décrite dans [DV]. Alors que pour les 1-exemples, la catégorie de base possède plutôt 1 paire orthogonale définissable non triviale (et donc forcément fixe) - mais cela reste à prouver pour **Ab** et pour **Ord**, les 2-exemples présentent en général (bien que là aussi ce n'est pas prouvé et que pour **Cat**, la situation n'est pas tout à fait claire) 2 paires orthogonales définissables non triviales qui sont couplées ensemble. Il semblerait y avoir un lien entre le nombre de paires orthogonales définissables non triviales et la “dimension”.

Ce lien pourrait apparaître de la façon suivante: si sur $\mathcal{V}$, il y a $n$ paires orthogonales définissables non triviales $(\mathcal{E}_i, \mathcal{M}_i)$ pour $i = 1, \dots n$, alors dans $\mathcal{V}$-**Cat** il serait possible de définir $n+1$ paires orthogonales non triviales. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, il y a les $\mathcal{V}$-foncteurs $(\mathcal{E}_i, \mathcal{M}_i)$-pleins et essentiellement surjectifs avec les $\mathcal{V}$-foncteurs $(\mathcal{E}_i, \mathcal{M}_i)$-fidèles, où un $\mathcal{V}$-foncteur $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ est $(\mathcal{E}_i, \mathcal{M}_i)$-plein [resp. fidèle] si tous les morphismes $F_{XY} : \mathbb{C}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{D}(FX, FY)$ sont dans $\mathcal{E}_i$ [resp. $\mathcal{M}_i$]. En plus de ces $n$ paires orthogonales, il y aurait aussi les foncteurs essentiellement surjectifs avec les foncteurs pleins et fidèles (ici les $F_{XY}$ sont des isomorphismes). Il reste à voir que ce sont bien des paires orthogonales, que les associées de ces $n+1$ paires orthogonales sont toutes différentes (en général, elles ne le sont pas elles-même; voir l'exemple de **Cat**) et qu'aucune autre paire orthogonale définissable ne se faufile dans $\mathrm{PO}(\mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat})$.

Si les $n$ paires de $\mathcal{V}$ sont des systèmes de factorisation, les $n+1$ paires de $\mathcal{V}$-**Cat** le seraient aussi.

### 2.10.1 CGS

Le cas des cat-groupes symétriques est le mieux connu. Les deux systèmes de factorisation $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ =(plein essentiellement surjectif, fidèle), et $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0) =$ (essentiellement surjectif, plein et fidèle) sont décrits en détail dans l'article [KV]. Il y a donc au moins quatre paires orthogonales dans PO(**CGS**):

$$(\text{équivalences}, \text{tout}) < (\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1) < (\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0) < (\text{tout}, \text{équivalences}). \tag{2.46}$$

Une telle situation donne une factorisation en trois parties des morphismes de **CGS** (et en général, si on a une chaîne de $n$ systèmes de factorisation non triviaux sur une catégorie, on obtient une factorisation en $n$ parties). Cela est dû à l'orthogonalité: si $F : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{H}$ est un morphisme, et si $\mathbb{G} \xrightarrow{E_0} \mathbb{I}_0 \xrightarrow{M_0} \mathbb{H}$ est la factorisation de $F$ dans $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$, et si $\mathbb{G} \xrightarrow{E_1} \mathbb{I}_1 \xrightarrow{M_1} \mathbb{H}$ est la factorisation de $F$ dans $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$, alors dans le diagramme suivant, comme $E_1 \in \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_0$ et $M_0 \in \mathcal{E}_0$, l'orthogonalité (classique, qui découle de la **CGS**-orthogonalité) donne une diagonale $D : \mathbb{I}_1 \longrightarrow \mathbb{I}_0$ qui rend commutatifs à isomorphisme près les deux triangles.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r, "E_1"] \arrow[d, "E_0"'] & \mathbb{I}_1 \arrow[d, "M_1"] \arrow[dl, "D"'] \\
\mathbb{I}_0 \arrow[r, "M_0"'] & \mathbb{H}
\end{tikzcd} \tag{2.47}$$

Ceci conduit à la factorisation en trois parties suivante, où le premier morphisme est plein et essentiellement surjectif, le deuxième, fidèle et essentiellement surjectif, et le troisième, plein et fidèle.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[rrr, "F"] \arrow[dr, "E_1"'] & & & \mathbb{H} \\
& \mathbb{I}_1 \arrow[r, "D"'] & \mathbb{I}_0 \arrow[ur, "M_0"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.48}$$

Dans un $\mathcal{V}$ quelconque, on aurait eu, si $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1) \leq (\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ dans PO($\mathcal{V}$), un morphisme allant de l'image de $f$ selon $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ vers l'image de $f$ selon $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$.

Il est prouvé presque entièrement dans [KV] (la partie manquante de la preuve étant dans [DV]) que les systèmes $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ et $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ se définissent mutuellement et sont donc couplés (dans un sens 2-catégoriel; remarque: à défaut de la définition d'un produit tensoriel dans **CGS**, la caractérisation de la coorthogonalité en terme de coproduit fibré n'est pas utilisable ici; mais **CGS** est bien une 2-catégorie “fermée”, en le sens qu'elle est enrichie dans elle-même, la structure de $[\mathbb{G}, \mathbb{H}]$ étant définie ponctuellement; on peut donc parler de paire orthogonale définie par une autre): soit $F : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{H}$ un morphisme de **CGS**; alors

- $F$ est plein et essentiellement surjectif ($\in \mathcal{E}_1$) ssi pour tout $\mathbb{Y} \in$ **CGS**, $- \circ F : [\mathbb{H}, \mathbb{Y}] \longrightarrow [\mathbb{G}, \mathbb{Y}]$ est plein et fidèle ($\in \mathcal{M}_0$);
- $F$ est essentiellement surjectif ($\in \mathcal{E}_0$) ssi pour tout $\mathbb{Y} \in$ **CGS**, $- \circ F : [\mathbb{H}, \mathbb{Y}] \longrightarrow [\mathbb{G}, \mathbb{Y}]$ est fidèle ($\in \mathcal{E}_1$).

Le lien entre ces deux systèmes de factorisations non triviaux et les dimensions de **CGS** est rendu particulièrement clair par les remarques suivantes. Tout d'abord, voici un rappel de notations et de propriétés de [KV].

On définit les 2-foncteurs suivants:

$$\pi_0 : \mathbf{CGS} \longrightarrow \mathbf{Ab} : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}_0/\sim; \tag{2.49}$$

$$\pi_1 : \mathbf{CGS} \longrightarrow \mathbf{Ab} : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}(I, I), \tag{2.50}$$

où **Ab** est vu comme 2-catégorie sans autres 2-flèches que les identités, et où la relation $\sim$ sur les objets de $\mathbb{G}$ identifie deux objets isomorphes. Ces deux foncteurs sont en quelque sorte les projections associées à chacune des dimensions de **CGS**: $\pi_0$ donne le niveau des objets et $\pi_1$ celui des flèches.

Ces deux 2-foncteurs ont chacun un 2-adjoint, $\pi_0$ à droite et $\pi_1$ à gauche:

$$\pi_0 \dashv D : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{CGS}; \tag{2.51}$$

$$\pi_1 \vdash\, ! : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{CGS}, \tag{2.52}$$

où $D(G)$ est le cat-groupe symétrique discret dont les objets sont les éléments de $G$, et $G!$ est la suspension de $G$, le cat-groupe symétrique à un objet dont les flèches sont les éléments de $G$. L'unité de l'adjonction $\pi_0 \dashv D$ est le morphisme plein et essentiellement surjectif

$$\eta_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \longrightarrow D(\pi_0(\mathbb{G})), \tag{2.53}$$

qui envoie un objet de $\mathbb{G}$ sur sa classe d'équivalence; et la counité de l'adjonction $! \dashv \pi_1$ est un morphisme plein et fidèle

$$\varepsilon_{\mathbb{G}} : \pi_1(\mathbb{G})! \longrightarrow \mathbb{G}, \tag{2.54}$$

qui est l'inclusion évidente.

Nous aboutissons à la proposition qui lie chacun des deux systèmes de factorisation à un des deux 2-foncteurs $\pi_0$ et $\pi_1$ et donc à une des deux dimensions de **CGS**.

**Proposition 2.37.**

1. *La 2-catégorie de fraction* $\mathbf{CGS}[\mathcal{E}_1^{-1}]$ *est* $\pi_0 : \mathbf{CGS} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.
2. *La 2-catégorie de fraction* $\mathbf{CGS}[\mathcal{M}_0^{-1}]$ *est* $\pi_1 : \mathbf{CGS} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

*Preuve.* Cela se prouve en utilisant les propriétés des adjonctions, et pour 1. le fait que l'unité de l'adjonction est dans $\mathcal{E}_1$, et pour 2. le fait que la counité est dans $\mathcal{E}_0$. □

Oublier le premier système $((\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1))$, autrement dit ne regarder que le deuxième $((\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0))$, revient donc à ne regarder que le niveau des objets. Tandis qu'oublier le deuxième système, c'est-à-dire ne regarder que le premier, revient à ne considérer que le niveau des flèches. On retrouve en fait ce qui se disait à la fin de l'introduction de cette section: la factorisation de $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ agit uniquement au niveau des objets (il est envoyé par $\pi_0$ sur $(\text{surjections}, \text{injections})$ et est rendu trivial par $\pi_1$), tandis que la factorisation de $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ agit uniquement au niveau des flèches (il est envoyé par $\pi_1$ sur $(\text{surjections}, \text{injections})$ et est rendu trivial par $\pi_0$).

Un autre signe de la corrélation entre dimensions et paires orthogonales définissables dans le cas de **CGS** sera donné plus tard: les équations 2.40 montrait que la dualité intervertit les paires orthogonales (couplées), et donc devrait aussi intervertir, d'une certaine façon, les dimensions. Deux exemples de colimites dont la construction fait intervenir les deux dimensions de **CGS** de façon inverse par rapport à la construction des limites correspondantes se trouvent dans les exemples du chapitre suivant.

Pour terminer, notons que $\mathcal{E}_1$ est engendré en particulier par le foncteur $\mathbb{Z}! \longrightarrow 0$ et que $\mathcal{E}_0$ est engendré par $D(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$.

### 2.10.2 Cat

La 2-catégorie **Cat** possède un certain nombre de paires orthogonales connues:

– les deux systèmes de factorisation triviaux;
– $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ =(plein ess. surjectif, fidèle), qui est un système de factorisation;
– $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ =(projection, conservatif), où un foncteur est une projection s'il est isomorphe dans Fl**Cat** à une catégorie de fraction $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}[\Sigma^{-1}]$; il faut encore prouver que c'est une paire orthogonale pour l'orthogonalité au sens de [DV]; mais ce n'est pas un système de factorisation (il y a un contrexemple dans [CJSV]);
– $(\mathcal{E}_2, \mathcal{M}_2)$ =(absolument dense,(absolument dense)$^{\downarrow}$), décrit ci-dessous; on ne sait pas si c'est un système de factorisation;
– $(\mathcal{E}_3, \mathcal{M}_3)$ =(ess. surjectif, plein fidèle), qui est un système de factorisation;
– $(\mathcal{E}_4, \mathcal{M}_4)$ =(presque surjectif, plein fidèle et stable sous rétracts), qui est un système de factorisation; un foncteur $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ est presque surjectif si tout objet de $\mathbb{D}$ est un rétract d'un objet de la forme $FC$; et il est stable sous rétracts si tout rétract d'un objet de la forme $FC$ est isomorphe à un $FC'$; si $\mathbb{C}$ est Cauchy-complète, tout foncteur plein et fidèle de domaine $\mathbb{C}$ est stable sous rétracts (cfr. [CJSV]); dès lors, si l'on se restreint aux catégories Cauchy-complètes, $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1) = (\mathcal{E}_2, \mathcal{M}_2)$.

**Remarque 2.38.** Il y a aussi la factorisation d'un foncteur en un foncteur initial suivi d'une op-fibration discrète de [SW] (et reprise dans [Kel]). Mais là, l'orthogonalité utilisée est l'orthogonalité 1-catégorielle dans la 1-catégorie des catégories, qui n'est pas le sujet de cette section; mais en modifiant les définitions de foncteur initial et d'op-fibration discrète de manière à les rendre "catégorielles" (c'est-à-dire stables sous équivalences de catégories et sous isomorphismes de foncteurs), on devrait obtenir une paire orthogonale dans **Cat** vu comme bicatégorie, la factorisation restant inchangée.

On connaît les inégalités suivantes dans PO**Cat** (en notant $\mathcal{S}_i = (\mathcal{E}_i, \mathcal{M}_i)$):

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_0 \leq \mathcal{S}_3 \leq \mathcal{S}_4; \\ &\mathcal{S}_0 \leq \mathcal{S}_2 \leq \mathcal{S}_4; \\ &\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2 \leq \mathcal{S}_4. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Les deux dernières lignes sont prouvées dans [AESV].

Les foncteurs absolument denses sont définis dans [AESV]. Ils ont la propriété (entre autres caractérisations) d'êtres définis par (plein fidèle, essentiellement surjectif), autrement dit $F$ est absolument dense si et seulement si pour toute petite catégorie $\mathbb{Y}$, le foncteur $-\circ F : \mathbb{Y}^{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{Y}^{\mathbb{C}}$ est plein et fidèle, et donc aussi si et seulement si pour tout foncteur essentiellement surjectif $E$, $E \wr F$. On peut alors écrire AbsDense $= [\text{Ess. Surj}, \mathcal{V}]^{\uparrow}$, et donc (AbsDense, $(\text{AbsDense})^{\downarrow}$) est une paire orthogonale. Dans le même article [AESV], il est prouvé que $F$ est presque surjectif si et seulement si pour toute petite catégorie $\mathbb{Y}$, le foncteur $-\circ F : \mathbb{Y}^{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{Y}^{\mathbb{C}}$ est fidèle. On sait donc aussi que (presque surjectif, plein fidèle et stable sous rétracts) est défini par (plein essentiellement surjectif, fidèle). Il y a donc deux paires orthogonales définissables $(\mathcal{E}_2, \mathcal{M}_2)$ et $(\mathcal{E}_4, \mathcal{M}_4)$ sur **Cat**. Il reste à voir si elles sont couplées et si elles sont les seules (dans ce cas, la fermeture de $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ serait $\mathcal{S}_2$ et celle de $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$.

### 2.10.3 Top et catégories de modèles monoïdales

Ici il ne s'agit que d'un signe qu'il y a un lien que l'on pourrait appeler "couplage faible" entre les deux systèmes de factorisation faibles qui déterminent une catégorie de modèles monoïdale.

Considérons d'abord le cas de **Top**, la catégorie des espaces topologiques. Soit $0 : 1 \longrightarrow I = [0,1]$ l'application continue qui correspond au point 0. La définition de fibration dans [Pic] peut être traduite ainsi: $p : E \longrightarrow B$ est une *fibration* si le diagramme suivant (où $\mathrm{ev}_0$ est l'évaluation au point 0) est un produit fibré faible dans **Top**.

$$\begin{tikzcd} E^I \arrow[r, "\mathrm{ev}_0"] \arrow[d, "p^I"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B^I \arrow[r, "\mathrm{ev}_0"] & B \end{tikzcd} \tag{2.56}$$

Cela peut encore être traduit en: $p$ est une fibration ssi $(0 : 1 \longrightarrow I) \downarrow^{\mathrm{f}} p$, où le "f" signifie que dans la définition d'orthogonalité on demande un produit fibré faible.

D'autre part, la définition de cofibration dans [Pic] peut être traduite ainsi: une application continue $i : A \longrightarrow X$ est une cofibration si le diagramme suivant est un coproduit fibré faible dans **Top**.

$$\begin{tikzcd}
A \times 1 \arrow[r, "\mathrm{id}\times 0"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i\times\mathrm{id}"] \\
X \times 1 \arrow[r, "\mathrm{id}\times 0"'] & X \times I
\end{tikzcd} \tag{2.57}$$

A nouveau, cela peut être traduit en: $i$ est une cofibration ssi $(0 : 1 \longrightarrow I) \wr^{\mathrm{f}} i$, où le "f" signifie que dans la définition de coorthogonalité, le coproduit fibré est faible.

En résumé, si l'on note Fib la classe des fibrations dans **Top** et Cofib la classe des cofibrations, les équations suivantes sont vérifiées:

$$\mathrm{Fib} = \{0 : 1 \longrightarrow I\}^{\downarrow^{\mathrm{f}}}; \tag{2.58}$$

$$\mathrm{Cofib} = \{0 : 1 \longrightarrow I\}^{\wr^{\mathrm{f}}}. \tag{2.59}$$

Ceci suggère que les deux systèmes de factorisation faibles (cofibrations, fibrations triviales) et (cofibrations triviales, fibrations) sont faiblement couplés.

En général, une catégorie de modèles monoïdale doit vérifier une certaine condition (voir [Hov]) qui est une version faible du couplage des deux systèmes de factorisation faible qui déterminent la catégorie de modèles.

# Chapitre 3

# $\mathcal{V}$-catégories $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-régulières et -exactes

Fixons pour ce chapitre une paire orthogonale $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sur une catégorie monoïdale symétrique fermée complète et cocomplète $(\mathcal{V}, \otimes, I, [-,-], \ldots)$.

## 3.1 Noyaux et conoyaux

La classe $\mathcal{E}$ peut-être vue comme une sous-catégorie pleine

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathrm{Fl}\mathcal{V} = [L\mathbf{2}, \mathcal{V}] \tag{3.1}$$

et fournit par adjonction deux poids (avec paramètres)

$$\phi : \mathcal{E} \otimes L\mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{V}; \tag{3.2}$$

$$\phi^{\mathrm{op}} : L\mathbf{2} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}. \tag{3.3}$$

Ces poids vont nous permettre de définir l'$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-noyau et l'$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-conoyau.

**Définition 3.1** ([BSS]). Soit $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$, c'est-à-dire $f : L\mathbf{2} \longrightarrow \mathbb{C}$. L'$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-noyau de $f$ est

$$K(f) = \{\phi, f\} : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}. \tag{3.4}$$

On a donc pour tout $e \in \mathcal{E}$, $K(f)(e) = \{e, f\}$ (qui est construit par des cotenseurs et un produit fibré dans le lemme 2.9; on pourrait aussi écrire $K(f) = \{-, f\} : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$). Si tous les noyaux existent, il y a un $\mathcal{V}$-foncteur

$$K = \{\phi, -\} : \mathrm{Fl}\mathbb{C} \longrightarrow [\mathcal{E}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}]. \tag{3.5}$$

Plus tard (section 3.3), nous verrons que le noyau peut se restreindre sans crainte sur une sous-catégorie codense de $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$; s'il existe sur cette sous-catégorie, il existera sur tout $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$; cela permettra, dans les exemples de rendre le noyau beaucoup plus petit et maniable: ce sera la paire-noyau dans **Ens**, le noyau dans **Ab**, le noyau et le pépin dans **CGS**.

Note: si tous les noyaux existent, alors tous les cotenseurs existent, puisque $[V, C] \cong K(1_C)(1_V)$.

**Proposition 3.2.** *Si tous les $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-noyaux existent, $f : C_0 \longrightarrow C_1$ dans $\mathbb{C}$ est un $\mathcal{M}$-morphisme si et seulement si $K(f) \cong K(1_{\operatorname{dom} f})$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $e : E_0 \longrightarrow E_1 \in \mathcal{E}$, $K(f)(e) \cong [E_1, C_0]$.*

*Preuve.* Comme $K(f)(e) = \{e, f\}$, c'est immédiat par les propositions 2.14 et 2.10. □

Par la proposition 2.15, on peut se restreindre dans la proposition précédente à une sous-classe génératrice de $\mathcal{E}$. Cela donne alors la définition de “monomorphisme” dans [BSS], la définition donnée dans le chapitre 2 n'y étant présentée que comme une caractérisation; mais cette dernière a l'avantage de ne pas nécessiter l'existence de limites.

On définit aussi l'$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-conoyau d'une flèche de $\mathbb{C}$.

**Définition 3.3.** Soit $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$, c'est-à-dire $f : L\mathbf{2}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$. L'$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-conoyau de $f$ est

$$J(f) = \phi^{\mathrm{op}} \star f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}. \tag{3.6}$$

On a donc pour tout $e \in \mathcal{E}$, $J(f)(e) = e \star f$ (construit par des tenseurs et un coproduit fibré dans le lemme 2.20; on pourrait aussi écrire $J(f) = - \star f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}$). Si tous les conoyaux existent, il y a un $\mathcal{V}$-foncteur

$$J = \phi^{\mathrm{op}} \star - : \mathrm{Fl}\mathbb{C} \longrightarrow [\mathcal{E}, \mathbb{C}]. \tag{3.7}$$

L'$(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-noyau classifie les $\mathcal{M}$-morphismes, comme nous l'apprend la proposition 3.2. Par contre, si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable, ce n'est pas le $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-conoyau qui classifie les $\mathcal{E}$-morphismes, mais le $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$-conoyau (noté $J^\bullet$).

**Proposition 3.4.** *Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est définissable et si tous les $(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$-conoyaux existent, alors $f : C_0 \longrightarrow C_1$ dans $\mathbb{C}$ est un $\mathcal{E}$-morphisme si et seulement si $J^\bullet(f) \cong J^\bullet(1_{C_0})$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $e : E_0 \longrightarrow E_1 \in \mathcal{E}^\bullet$, $J^\bullet(f)(e) \cong [E_1, C_0]$.*

*Preuve.* Dual de 3.2: comme $J^\bullet(f)(e) = e \star f$, c'est immédiat par les propositions 2.31 et 2.21. □

Ici aussi, on peut se restreindre à une sous-classe génératrice de $\mathcal{E}^\bullet$, par la proposition 2.32.

Étant donné qu'on a supposé que $\mathcal{V}$ est complète et cocomplète, $\mathcal{V}$ a tous les noyaux et tous les conoyaux.

## 3.2 Stabilité sous limites/colimites des $\mathcal{E}$- et $\mathcal{M}$-morphismes

Dans le cas classique, on prouve qu'une transformation naturelle est un monomorphisme si et seulement si toutes ses composantes sont des monomorphismes, en utilisant la caractérisation des monomorphismes en terme de paire-noyau.

**Proposition 3.5.** *Soit $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}$ ,deux $\mathcal{V}$-catégorie.*

1. *si $\mathbb{C}$ a tous les $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-noyaux (en particulier si $\mathbb{C} = \mathcal{V}$), alors*

$$\alpha \in \mathcal{M}_{[\mathbb{D},\mathbb{C}]} \Leftrightarrow \forall D \in \mathbb{D},\ \alpha_D \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}; \tag{3.8}$$

2. *si $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ est définissable et si $\mathbb{C}$ a tous les $(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)$-conoyaux (en particulier si $\mathbb{C}=\mathcal{V}$),*

$$\alpha \in \mathcal{E}_{[\mathbb{D},\mathbb{C}]} \Leftrightarrow \forall D \in \mathbb{D},\ \alpha_D \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}. \tag{3.9}$$

*Preuve.* Cela découle des propositions 3.2 et 3.4. Prouvons le cas des $\mathcal{M}$-morphismes. Une transformation $\mathcal{V}$-naturelle $\alpha : F \Rightarrow G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est un $\mathcal{M}$-morphisme si et seulement si $K(\alpha) \cong K(1_F)$. Par la proposition 1.5, cela revient à: pour tout $D \in \mathbb{D}$, $K(\alpha_D) \cong K(1_{FD})$, c'est-à-dire à pour tout $D \in \mathbb{D}$, $\alpha_D$ est un $\mathcal{M}$-morphisme dans $\mathbb{C}$. □

**Proposition 3.6.** *Soit $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ une paire orthogonale définissable. Soient $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}$, des $\mathcal{V}$-catégories, Soient $\phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\psi : \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ et $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

1. *si $\mathbb{C}$ a tous les $(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)$-conoyaux, alors $\psi \star - : [\mathbb{D},\mathbb{C}] \longrightarrow \mathbb{C}$ (défini partiellement) préserve les $\mathcal{E}$-morphismes, c'est-à-dire envoie $\mathcal{E}_{[\mathbb{D},\mathbb{C}]}$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ (et donc, par la proposition précédente, les $\mathcal{E}$-morphismes sont stable sous colimites pondérées);*
2. *si $\mathbb{C}$ a tous les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-noyaux, alors $\{\phi,-\} : [\mathbb{D},\mathbb{C}] \longrightarrow \mathbb{C}$ préserve les $\mathcal{M}$-morphismes, c'est-à-dire envoie $\mathcal{M}_{[\mathbb{D},\mathbb{C}]}$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ (et donc, par la proposition précédente, les $\mathcal{M}$-morphismes sont stable sous limites pondérées);*
3. *$-\star F : [\mathbb{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}] \longrightarrow \mathbb{C}$ préserve les $\mathcal{E}$-morphismes (forts), c'est-à-dire envoie $\mathcal{E}_{[\mathbb{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]}$ dans $\mathcal{E}^{(\mathrm{fort})}_{\mathbb{C}}$ (dans $[\mathbb{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]$, tous les $\mathcal{E}$-morphismes sont forts);*
4. *$\{-,F\} : [\mathbb{D},\mathcal{V}]^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ préserve les $\mathcal{M}$-morphismes (forts), c'est-à-dire envoie $\mathcal{E}^\bullet_{[\mathbb{D},\mathcal{V}]} (= \mathcal{M}_{[\mathbb{D},\mathcal{V}]^{\mathrm{op}}}$; équation 2.40) dans $\mathcal{M}^{(\mathrm{fort})}_{\mathbb{C}}$ (dans $[\mathbb{D},\mathcal{V}]$, tous les $\mathcal{M}$-morphismes sont forts).*

*Preuve.*

1. Soit $\alpha \in \mathcal{E}_{[\mathbb{D},\mathbb{C}]}$. Par la proposition précédente, pour tout $D \in \mathbb{D}$, $\alpha_D \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ et donc pour tout $Y \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(\alpha_D, Y) \in \mathcal{M}^\bullet$. Dès lors, à nouveau par la proposition précédente, $\mathbb{C}(\alpha, Y) \in \mathcal{M}^\bullet_{[\mathbb{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]}$. Alors pour tout $Y \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(\psi \star \alpha, Y) \cong [\mathbb{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}](\psi, \mathbb{C}(\alpha, y)) \in \mathcal{M}^\bullet$, ce qui permet de conclure.
2. Dual de 1.
3. Soit $\beta \in \mathcal{E}_{[\mathbb{D},\mathcal{V}]}$. Il faut vérifier que pour tout $m \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, $(\beta \star F) \downarrow m$ dans $\mathbb{C}$. Il est facile de voir que cela est équivalent à pour tout $m \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, $\beta \downarrow \mathbb{C}(F,m)$ dans $[\mathbb{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]$; par ponctualité des limites dans $[\mathbb{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]$, c'est encore équivalent à pour tout $D \in \mathbb{D}$, pour tout $m \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, $\beta_D \downarrow \mathbb{C}(FD,m)$ dans $\mathcal{V}$, qui est vrai car $\beta_D \in \mathcal{E}$ par la proposition précédente, et $\mathbb{C}(FD,m) \in \mathcal{M}$.
4. Dual de 3.

□

La propriété 1. implique que les $\mathcal{E}$-morphismes sont stables sous coproduit fibré, et la propriété 2., que les $\mathcal{M}$-morphismes sont stabels sous produit fibré (au moins sous les conditions de ces propositions).

## 3.3 Congruences et cocongruences

**Définition 3.7.** Le *pivot* de $H : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ (ou de $H : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}$) est

$$\operatorname{piv} H = H(1_I) = H(L\mathbf{2}(0,-)). \tag{3.10}$$

**Lemme 3.8.** *Si* $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$*,*

$$\begin{aligned} \operatorname{piv} K(f) &\cong \operatorname{dom} f; \\ \operatorname{piv} J(f) &\cong \operatorname{codom} f. \end{aligned} \tag{3.11}$$

*Preuve.* $\operatorname{piv} K(f) = K(f)(L\mathbf{2}(0,-)) = \{L\mathbf{2}(0,-), f\} \cong \operatorname{dom} f$, ce dernier isomorphisme étant une application de l'équation 1.23, en sachant que si $f$ est vu comme $\mathcal{V}$-foncteur $L\mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{V}$, $f(0) = \operatorname{dom} f$. □

**Définition 3.9** ([BSS])**.** Une $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-*congruence* dans $\mathbb{C}$ est un $\mathcal{V}$-foncteur $H : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que pour tout $X \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(X, H-) : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ est un $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-noyau. Si $\operatorname{piv} H = C$, alors on dit que c'est une $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruence *sur* $C$. On notera $\mathrm{Cong}_{(\mathcal{E},\mathcal{M})}\mathbb{C}$ (ou $\mathrm{Cong}\mathbb{C}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) la sous-$\mathcal{V}$-catégorie pleine de $[\mathcal{E}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}]$ des $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruences.

**Proposition 3.10.** *Le* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$*-noyau de* $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$ *est une* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$*-congruence sur* $\operatorname{dom} f$*. Si* $\mathbb{C} = \mathcal{V}$*,* $H$ *est une* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$*-congruence si et seulement si c'est un* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$*-noyau.*

*Preuve.* Si $X \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(X, K(f)) \cong K(\mathbb{C}(X, f))$, et donc $K(f)$ est une $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruence. Si $\mathbb{C} = \mathcal{V}$, et si $H$ une $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruence, $[I, H-] \cong H$ est un $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-noyau. □

**Lemme 3.11.** *Dans* $\mathcal{V}$*, si* $e \in \mathcal{E}$ *et* $f = m_f \circ e_f$*, où* $m_f \in \mathcal{M}$ *et* $e_f \in \mathcal{E}$*, alors*

$$\mathrm{Fl}\mathcal{V}(e, f) \cong \mathrm{Fl}\mathcal{V}(e, e_f). \tag{3.12}$$

*Et donc*

$$K(f) = K(e_f). \tag{3.13}$$

*Preuve.* On utilise les propriétés des produits fibrés, la construction des $\mathrm{Fl}\mathcal{V}(a,b)$ et de l'orthogonalité en termes de produits fibrés, et le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl}\mathcal{V}(e,f) \arrow[r] \arrow[d] & {[E_0, C_0]} \arrow[d, "{[E_0, e_f]}"] \\ {[E_1, I]} \arrow[r, "{[e, I]}"] \arrow[d, "{[E_1, m_f]}"'] & {[E_0, I]} \arrow[d, "{[E_0, m_f]}"] \\ {[E_1, C_1]} \arrow[r, "{[e, C_1]}"'] & {[E_0, C_1]} \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

La deuxième thèse provient du fait que $K(f)(e) = \{e, f\} = \mathrm{Fl}\mathcal{V}(e, f)$. □

**Lemme 3.12.** *Si* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ *est un système de factorisation, alors* $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathrm{Fl}\mathcal{V}$ *est une sous catégorie coréflexive.*

*Preuve.* On fixe tout d'abord pour chaque $f \in \mathrm{Fl}\mathcal{V}$ une factorisation dans $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$: $f = m_f \circ e_f$. On définit alors le foncteur $e_- : \mathrm{Fl}\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}$ sur les objets par $e_-(f) = e_f$. Pour définir $(e_-)_{ff'} : \mathrm{Fl}\mathcal{V}(f, f') \longrightarrow \mathcal{E}(e_f, e_{f'})$, on utilise l'orthogonalité et la construction des $\mathrm{Fl}\mathcal{V}(a, b)$ en termes de produit fibré, un peu comme pour le lemme précédent. Ce lemme fournit justement l'adjonction $i \dashv e_-$, car on peut réécrir sa thèse comme $\mathrm{Fl}\mathcal{V}(i(e), f) \cong \mathcal{E}(e, e_f)$. □

**Lemme 3.13.** *Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est un système de factorisation, les $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-noyaux dans $\mathcal{V}$ préservent les limites.*

*Preuve.* Si $f \in \mathrm{Fl}\mathcal{V}$, $K(f) =$

$$\mathcal{E}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathrm{Fl}\mathcal{V}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Fl}\mathcal{V}(-,f)} \mathcal{V}. \tag{3.15}$$

Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est un système de factorisation, alors $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ est une sous-catégorie réflexive de $\mathrm{Fl}\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ (lemme précédent) et l'inclusion préserve donc les limites. Et comme les foncteurs représentables préservent les limites, $K(f)$ préserve les limites. □

**Proposition 3.14.** *Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est un système de factorisation, les $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-congruences dans une $\mathcal{V}$-catégorie $\mathbb{C}$ préservent les limites.*

*Preuve.* Soit $H : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ une $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-congruence. Soit $\{\phi, T\}$ une limite dans $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$. Alors $H(\{\phi, T\}) \cong \{\phi, HT\}$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}(X, H(\{\phi, T\})) \cong \{\phi, \mathbb{C}(X, HT)\}. \tag{3.16}$$

Comme $H$ est une congruence, $\mathbb{C}(X, H-) \cong K(f)$ pour un certain $f$ et par le lemme précédent, l'équation 3.16 est vérifiée. □

**Corollaire 3.15.** *Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est un système de factorisation, si $H : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-congruence et si $i : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{E}$ est une sous-catégorie dense (définition 1.10), alors*

$$H = \mathrm{Ran}_{i^{\mathrm{op}}}(H \circ i^{\mathrm{op}}). \tag{3.17}$$

*Preuve.* Si $i$ est dense, $i^{\mathrm{op}}$ est codense, c'est-à-dire $1_{\mathcal{E}^{\mathrm{op}}} = \mathrm{Ran}_{i^{\mathrm{op}}}(i^{\mathrm{op}})$; comme $H$ préserve les limites, par la proposition précédente, $H$ préserve aussi les extensions de Kan à droite (proposition 1.9) et on obtient la thèse de ce corollaire. □

Notons tout d'abord que dans tous les exemples que l'on va examiner à la fin de ce chapitre, on va prouver, au cas par cas, que si $\mathcal{W}$ engendre un système de factorisation $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, alors $\mathcal{X} = \mathcal{W} \cup \{L\mathbf{2}(0, -) = 1_I\}$ est une sous-catégorie dense de $\mathcal{E}$. L'intérêt de la proposition précédente est qu'elle garantit que dans une $\mathcal{V}$-catégorie $\mathbb{C}$, à partir de la valeur du noyau sur une sous-catégorie codense de $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$, on peut retrouver le noyau sur tout $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$, en calculant l'extension de Kan à droite. Son existence sur la sous-catégorie implique son existence. En restreignant le noyau à un tel $\mathcal{X}$, on ne perd donc pas d'information, ce qui justifie que dans les exemples on se limite à cette restriction: paire-noyau dans **Ens**, noyau dans **Ab**, noyau et pépin dans **CGS**; tout cela est détaillé dans les deux dernières sections.

On définit également les $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-cocongruences, qui possèdent les propriétés duales de celles des $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-congruences.

**Définition 3.16.** Une $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-*cocongruence* dans $\mathbb{C}$ est un $\mathcal{V}$-foncteur $H:\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{C}$ tel que pour tout $Y\in\mathbb{C}$, $\mathbb{C}(H-,Y):\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathcal{V}$ est un $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-noyau. Si $\operatorname{piv} H=C$, on dit que c'est une cocongruence *sur* $C$.

## 3.4 Quotients et coquotients

Le poids pour le quotient est le même que pour le noyau, $\phi:L\mathbf{2}\otimes\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{V}$, mais cette fois les paramètres sont $L\mathbf{2}$. Cela revient donc au diagramme de poids suivant:

$$\phi(\varpi,-):\phi(0,-)\Rightarrow\phi(1,-):\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{V}, \tag{3.18}$$

si $\mathbf{2}=\{\varpi:0\longrightarrow 1\}$. Dans ce diagramme, $\phi(0,-)$ donne le domaine et $\phi(1,-)$ le codomaine des objets de $\mathcal{E}$, tandis que pour tout $e\in\mathcal{E}$, $\phi(\varpi,e)=e$; dès lors par la proposition 3.5, $\phi(\varpi,-)\in\mathcal{E}_{[\mathcal{E},\mathcal{V}]}$.

**Définition 3.17.** Le $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-*quotient* de $H:\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathbb{C}$ est

$$Q(H)=\phi\star H:L\mathbf{2}\longrightarrow\mathbb{C}, \tag{3.19}$$

c'est-à-dire le morphisme $Q(H)=\phi(\varpi,-)\star H$ dans $\mathbb{C}$. Si tous les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-quotients des $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruences existent, il y a un $\mathcal{V}$-foncteur

$$Q=\phi\star-:\mathrm{Cong}_{(\mathcal{E},\mathcal{M})}\mathbb{C}\longrightarrow\mathrm{Fl}\mathbb{C}. \tag{3.20}$$

**Proposition 3.18.** *Si $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ est un système de factorisation, alors dans $\mathcal{V}$, tous les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-quotients des $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruences existent. (Ce fait n'est pas évident car on a affaire à une grande limite.)*

*Preuve.* Le $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-quotient de $K(f):\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathcal{V}$ n'est autre que $e_f\in\mathcal{E}$, la première partie de la factorisation de $f$ dans $(\mathcal{E},\mathcal{M})$. En effet, $K(f)\cong K(e_f)$ (par le lemme 3.11). Il suffit donc de montrer que le quotient de $K(e_f)$ est $e_f$ (ou, en général, que tout $e\in\mathcal{E}$ est le quotient de son noyau). Il est facile de montrer que $\phi(0,-)\star K(e)\cong E_0$ (voir le lemme 3.20 ci-dessous). Il reste donc à prouver que $\phi(1,-)\star K(e)\cong E_1$, ce qui revient à montrer que pour tout $Y\in\mathcal{V}$, $[E_1,Y]\cong[\mathcal{E},\mathcal{V}](\phi(1,-),[K(e),Y])$. Si on a $\alpha:\phi(1,-)\Rightarrow[K(e),Y]:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{V}$, alors, comme $e\in\mathcal{E}$, on peut considérer $\alpha_e:E_1\longrightarrow[\mathrm{Fl}\mathcal{V}(e,e),Y]$, qui correspond par adjonction à $\gamma_e:\mathrm{Fl}\mathcal{V}(e,e)\longrightarrow[E_1,Y]$; on obtient alors une flèche $\widehat{\alpha}:E_1\longrightarrow Y$. Le reste est du calcul facile. □

**Théorème 3.19** ([BSS])**.** *Si tous les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-noyaux et tous les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-quotients des $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruences existent, alors*

$$Q\dashv K:\mathrm{Fl}\mathbb{C}\longrightarrow\mathrm{Cong}_{(\mathcal{E},\mathcal{M})}\mathbb{C}. \tag{3.21}$$

*Preuve.* Si $H:\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathbb{C}$ et $f\in\mathrm{Fl}\mathbb{C}$,

$$[\mathcal{E}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}](H,K(f))\cong[\mathcal{E}\otimes L\mathbf{2},\mathcal{V}](\phi,\mathbb{C}(H-,f-))\cong\mathrm{Fl}\mathbb{C}(Q(H),f).$$ □

**Lemme 3.20.** *Si $H:\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathbb{C}$,*

$$\operatorname{dom} Q(H)\cong\operatorname{piv} H. \tag{3.22}$$

*Preuve.* Il suffit de remarquer que $\phi(0,-) = \mathrm{dom} = \mathcal{E}^{\mathrm{op}}(-,L\mathbf{2}(0,-))$. La première égalité a été prouvée au début de cette section; quant à la seconde elle provient de Yoneda: si $e \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}^{\mathrm{op}}(e,L\mathbf{2}(0,-)) = \mathcal{E}(L\mathbf{2}(0,-),e) = \mathrm{Fl}\mathcal{V}(L\mathbf{2}(0,-),e) \cong e(0) = \mathrm{dom}\, e.$$

On peut donc appliquer l'équation 1.23 pour obtenir $\mathrm{dom}\, Q(H) = Q(H)(0) = \phi(0,-) \star H \cong \mathcal{E}^{\mathrm{op}}(-,L\mathbf{2}(0,-)) \star H \cong H(L\mathbf{2}(0,-)) = \mathrm{piv}\, H$. □

Regardons à nouveau ce qui se passe lorsque l'on a une sous-catégorie dense $j : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{E}$. On a un poids restreint $\phi_{\mathcal{X}} = \phi(-,j-)$, et donc un quotient restreint des congruences restreintes: si $L : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$, on peut définir $Q_{\mathcal{X}}(L) = \phi_{\mathcal{X}} \star L$.

**Proposition 3.21.** *Si $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ est un système de factorisation, si $H : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruence, si $j : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{E}$ est dense et si $L\mathbf{2}(0,-) = 1_I \in \mathcal{X}$, alors*

$$Q(H) \cong Q_{\mathcal{X}}(H \circ j^{\mathrm{op}}). \tag{3.23}$$

*Preuve.* Tout d'abord, montrons que les domaines sont les mêmes. On sait que $\mathrm{dom}\, Q(H) \cong \mathrm{piv}\, H = H(L\mathbf{2}(0,-))$, par le lemme 3.20. Le même argument que celui utilisé dans le lemme, qui fonctionne grâce à la présence de $L\mathbf{2}(0,-)$ dans $\mathcal{X}$, prouve que le domaine de $Q_{\mathcal{X}}(H \circ j^{\mathrm{op}})$ est $H \circ j(L\mathbf{2}(0,-)) = \mathrm{piv}\, H$.

Il reste à prouver que $\phi(1,-) \star H \cong \phi(1,j-) \star H \circ j$. Or $\phi(1,-) =$

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathrm{Fl}\mathcal{V} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{V}. \tag{3.24}$$

Par le lemme 3.12, l'inclusion de $\mathcal{E}$ dans $\mathrm{Fl}\mathcal{V}$ est une sous-catégorie coréflexive. De plus, il est facile de voir que $\partial_1$, qui envoie une flèche sur son codomaine, a un adjoint à droite, qui envoie un objet sur l'identité sur cet objet. Dès lors $\phi(1,-)$ est le composé de deux adjoints à gauche et est lui-même un adjoint à gauche et préserve donc les extensions de Kan à gauche. En particulier, il préserve l'extension de Kan $1_{\mathcal{E}} = \mathrm{Lan}_j j$, due au fait que l'inclusion $j$ est dense. On a donc $\phi(1,-) = \mathrm{Lan}_j \phi(1,j-)$. La troisième partie de la proposition 1.9 permet de conclure positivement. □

De cette proposition découle que le quotient que l'on obtient à partir de la restriction du noyau à $\mathcal{X}$ est exactement le quotient du noyau. Dès lors, dans tous les exemples à la fin de ce chapitre, le quotient utilisé effectivement, qui a l'avantage d'être une petite limite, donne le même résultat que le "grand" quotient. On retrouve ainsi, dans **Ens**, le coégalisateur, dans **Ab**, le conoyau et dans **CGS**, le conoyau et la coracine. On en déduit aussi que les $\mathcal{E}$-morphismes réguliers vont être les mêmes définis à partir de $\mathcal{E}$ tout entier, ou sur $\mathcal{X}$ seulement, comme cela est fait dans [BSS].

**Définition 3.22.** $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$ est un *$\mathcal{E}$-morphisme régulier* s'il existe $H \in [\mathcal{E}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}]$ tel que $f = Q(H)$. On note $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\text{rég}}$ la classe des $\mathcal{E}$-morphismes réguliers dans $\mathbb{C}$.

Dans $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\text{rég}} = \mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\text{fort}} = \mathcal{E}_{\mathcal{V}} = \mathcal{E}$ (par la preuve de la proposition 3.18 et par la proposition suivante). Dans les **Ens**- et **Ab**-catégories, les $\mathcal{E}$-morphismes réguliers ne sont autres que les épimorphismes réguliers.

**Proposition 3.23.** *Tous les $\mathcal{E}$-morphismes réguliers sont des $\mathcal{E}$-morphismes forts (et aussi des $\mathcal{E}$-morphismes).*

*Preuve.* Comme le poids du quotient, $\phi(\varpi,-)$ est dans $\mathcal{E}_{[\mathcal{E},\mathcal{V}]}$ (comme on l'a constaté au début de la section), par le point 3. de la proposition 3.6, $Q(H) = \phi(\varpi,-) \star H \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\text{fort}}$. □

On définit aussi le coquotient, qui est une limite qui utilise le poids $\phi^{\text{op}} : \mathcal{E} \otimes L\mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{V}$, avec $L\mathbf{2}$ comme paramètres.

**Définition 3.24.** Le $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-*coquotient* de $H : \mathcal{E}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ est

$$P(H) = \{\phi^{\text{op}}, H\} : L\mathbf{2} \longrightarrow \mathbb{C}, \tag{3.25}$$

c'est-à-dire $P(H) = \{\phi^{\text{op}}(-,\varpi), H\} \in \text{Fl}\mathbb{C}$. Si tous les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-coquotients des $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-cocongruences existent, il y a un $\mathcal{V}$-foncteur

$$P = \{\phi^{\text{op}}, -\} : \text{Cocong}_{(\mathcal{E},\mathcal{M})}\mathbb{C} \longrightarrow \text{Fl}\mathbb{C}. \tag{3.26}$$

Le coquotient vérifie les propriétés duales du quotient; en particulier, on a l'adjonction suivante (exprimée pour $(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)$, car c'est ce cas qui sera utile).

**Théorème 3.25.** *Si tous les $(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)$-conoyaux et tous les $(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)$-coquotients des $(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)$-cocongruences existent dans $\mathbb{C}$, alors*

$$J^\bullet \dashv P^\bullet : \text{Cocong}_{(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)}\mathbb{C} \longrightarrow \text{Fl}\mathbb{C}. \tag{3.27}$$

On définit également les $\mathcal{M}$-morphismes réguliers, qui sont toujours des $\mathcal{M}$-morphismes forts et des $\mathcal{M}$-morphismes.

**Définition 3.26.** Soit $f \in \text{Fl}\mathbb{C}$; $f$ est un $\mathcal{M}$-*morphisme régulier* s'il existe $H \in [\mathcal{E}^\bullet,\mathbb{C}]$ tel que $f = P^\bullet(H)$.

## 3.5 Factorisation régulière

*Pour l'instant, ce n'est qu'une esquisse; on trouve plus de détails dans [BSS], dans le cas des bicatégories, où ils n'utilisent pas $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ en entier.*

La counité de l'adjonction 3.19, $\varepsilon_f : Q(K(f)) \longrightarrow f$ donne une cofactorisation de $f$ à travers le $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-quotient de son $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-noyau:

$$\begin{tikzcd} Q(K(f))_0 \arrow[r, "(\varepsilon_f)_0"] \arrow[d, "Q(K(f))"'] & C_0 \arrow[d, "f"] \\ Q(K(f))_1 \arrow[r, "(\varepsilon_f)_1"'] & C_1. \end{tikzcd} \tag{3.28}$$

En effet, la première composante d'$\varepsilon_f$ est l'iso $\text{dom}\, Q(K(f)) = \text{piv}\,(K(f)) = \text{dom}\, f$ qui provient des lemmes 3.8 et 3.20. C'est la *factorisation* $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-*régulière*, où $Q(K(f))$ est un $\mathcal{E}$-morphisme régulier :

$$f = (\varepsilon_f)_1 \circ Q(K(f)). \tag{3.29}$$

On peut définir alors les $\mathcal{V}$-catégories régulières.

**Définition 3.27.** Une $\mathcal{V}$-catégorie complète (et qui a donc tous les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-noyaux) est $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-*régulière* si

1. tous les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-quotients des $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruences existent ;
2. pour tout $f$, $(\varepsilon_f)_1$ est un $\mathcal{M}$-morphisme ;
3. les $\mathcal{E}$-morphismes réguliers sont stables sous cotenseurs et produits fibrés.

Dans **Ens** ou **Ab**, une $\mathcal{V}$-catégorie (surj.,inj.)-régulière est tout simplement une catégorie régulière. Dans [BSS], il n'y a pas la condition 2.

Il faudrait montrer que cette définition est équivalente à la même avec 2. remplacé par 2'. $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\text{fort}},\mathcal{M}_{\mathbb{C}})$ est un système de factorisation, et 3. remplacé par 3'. les $\mathcal{E}$-morphismes forts sont stables sous produit fibré et cotenseur.

On peut aussi définir les $\mathcal{V}$-catégories $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-exactes.

**Définition 3.28.** Une $\mathcal{V}$-catégorie complète est $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-exacte si elle est $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-régulière et si toutes les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruences sont des $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-noyaux.

## 3.6 $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-catégories et comparaison entre les factorisations

On a remarqué dans la proposition 2.35, que l'on a en quelque sorte deux généralisations de $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ dans une $\mathcal{V}$-catégorie avec tenseurs et cotenseurs. On voudrait exiger qu'il n'y en ait qu'une, c'est-à-dire que $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\text{fort}},\mathcal{M}_{\mathbb{C}}) = (\mathcal{E}_{\mathbb{C}},\mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{\text{fort}})$.

**Définition 3.29.** Si $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ est définissable, une $\mathcal{V}$-catégorie complète et cocomplète avec tous les $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-quotients et -coquotients des $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-congruences et -cocongruences est une $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-*catégorie* si $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}},\mathcal{M}_{\mathbb{C}})$ est un système de factorisation.

Si $\mathcal{E}$ est stable sous produit fibré, une $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-catégorie est $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-régulière. Est-elle $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-exacte ?

On peut toujours, si $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ est définissable, comparer la factorisation $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-régulière avec la factorisation $(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)$-corégulière. Pour voir cela, considérons le diagramme suivant, qui représente la composition dans $\mathrm{Fl}\mathcal{V}$ de la counité de l'adjonction $Q \dashv K$ au point $f$, $\varepsilon_f : QK(f) \longrightarrow f$, et de l'unité de l'adjonction $J^\bullet \dashv P^\bullet$ au point $f$, $\eta_f^\bullet : f \longrightarrow P^\bullet J^\bullet(f)$.

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, "QK(f)"'] & C_0 \arrow[r, "(\eta_f)_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[d, "P^\bullet J^\bullet(f)"] \\ Q_1 \arrow[r, "(\varepsilon_f)_1"'] & C_1 \arrow[r, equal] & C_1 \end{tikzcd} \tag{3.30}$$

Comme $QK(f) \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\text{rég}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\text{fort}}$ et $P^\bullet J^\bullet(f) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{\text{rég}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, $QK(f) \downarrow P^\bullet J^\bullet(f)$ dans $\mathbb{C}$, et donc, par définition de l'orthogonalité,

$$\mathrm{Fl}\mathbb{C}(QK(f), P^\bullet J^\bullet(f)) \cong \mathbb{C}(Q_1, P_0), \tag{3.31}$$

et à la flèche $\eta_f \circ \varepsilon_f : QK(f) \longrightarrow P^\bullet J^\bullet(f)$, correspond une flèche $\omega_f : Q_1 \longrightarrow P_0$ qui fait commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "QK(f)"'] \arrow[dr] & C_1 \\
Q_1 \arrow[r, dashed, "\omega_f"'] \arrow[ur] & P_0 \arrow[u, "P^\bullet J^\bullet(f)"']
\end{tikzcd} \tag{3.32}$$

On devrait alors pouvoir remplacer dans la définition de $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-catégorie la condition que $(\mathcal{E}_\mathbb{C},\mathcal{M}_\mathbb{C})$ est un système de factorisation par le fait que pour tout $f \in \mathrm{Fl}\mathbb{C}$, $\omega_f$ est un isomorphisme. Dans une telle $\mathcal{V}$-catégorie, la factorisation $\mathcal{E}$-morphisme/$\mathcal{M}$-morphisme peut être construite soit par le $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-quotient du $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-noyau, soit par le $(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)$-coquotient du $(\mathcal{E}^\bullet,\mathcal{M}^\bullet)$-conoyau.

On dirait alors qu'une $\mathcal{V}$-catégorie est *parfaite* si c'est une $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-catégorie pour tout système de factorisation définissable $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ sur $\mathcal{V}$.

## 3.7 Exemples

### 3.7.1 Ens

Remarquons pour commencer que la paire-noyau de $f : X_0 \longrightarrow X_1$ est $K(f)(2 \longrightarrow 1) = \{!_2, f\}$. En effet, cette dernière limite est construite par le produit fibré suivant.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \times X_0 \arrow[d, "f \times f"] \\
X_1 \arrow[r, tail, "\delta_{X_1}"'] & X_1 \times X_1
\end{tikzcd} \tag{3.33}$$

Il est clair que $P$ est la paire-noyau de $f$. On peut prouver alors que $\mathbb{X} = \{2 \longrightarrow 1, 1 = 1\}$ est une sous-catégorie dense des surjections. La preuve est très semblable à celle dans le cas des catégories abéliennes, qui se trouve dans la sous-section suivante. Elle utilise le fait qu'une surjection est le coégalisateur de sa paire-noyau.

Toute congruence dans **Ens** n'est autre qu'une relation d'équivalence. (L'inverse n'est pour l'instant pas certain.) On voit comment on obtient une relation d'équivalence à partir d'une congruence $H : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{C}$ ainsi: on pose $H(1_1) = C$; $H(2 \longrightarrow 1) = R$; $(0, \mathrm{id}) : 1_1 \longrightarrow !_2$, donne, sous $H$, $d_0 : R \longrightarrow C$ et $H(1, \mathrm{id}) = d_1 : R \longrightarrow C$. On a la réflexivité grâce à $(!_2, \mathrm{id}) : !_2 \longrightarrow 1_1$ qui est envoyé sur un morphisme $r : C \longrightarrow R$ qui vérifie les conditions requises; de façon analogue, on obtient la symétrie et la transitivité; pour cette dernière, on utilise le fait que $H$ préserve les produits fibrés. Le quotient d'une congruence est son coégalisateur.

Les topos devraient être parfaits.

### 3.7.2 Ab

Remarquons tout d'abord que si $f : G_0 \longrightarrow G_1$, $K(f)(\mathbb{Z} \longrightarrow 0) = \{!_{\mathbb{Z}}, f\}$ donne le noyau (au sens ordinaire) de $f$. En effet, cette limite est calculée par le produit fibré suivant, qui donne évidemment le noyau de $f$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & G_1 \end{tikzcd} \tag{3.34}$$

**Proposition 3.30.** *$\mathcal{X} = \{\mathbb{Z} \longrightarrow 0, 0 = 0\}$ est une sous-catégorie dense des surjections $\mathcal{E}$.*

*Preuve.* On utilise la proposition 1.11. Il faut prouver que l'**Ab**-foncteur de $\mathcal{E}$ vers $[\mathcal{X}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]$ qui envoie $e$ sur $\mathcal{E}(-, e)$ et $(u, v) : e \longrightarrow e'$ sur $\mathcal{E}(-, (u, v))$ est plein et fidèle.

Fidélité. Si $(u, v)$ et $(u', v') : e \longrightarrow e'$ ont la même image, alors $u = \mathcal{E}(1_{\mathbb{Z}}, (u, v)) = \mathcal{E}(1_{\mathbb{Z}}, (u', v')) = v$. Ensuite, $\mathcal{E}(!_{\mathbb{Z}}, e) = \{!_{\mathbb{Z}}, e\}$ est le noyau de $e$, comme il est prouvé ci-dessus. Dès lors la situation est celle du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} e \arrow[r] \arrow[d] & E_0 \arrow[r, "e"] \arrow[d, "u"] & E_1 \arrow[d, "v"] \\ \operatorname{Ker} e' \arrow[r] & E'_0 \arrow[r, "e'"'] & E'_1 \end{tikzcd} \tag{3.35}$$

On sait déjà que $u = u'$ et le fait que $\mathcal{E}(!_{\mathbb{Z}}, (u, v)) = \mathcal{E}(!_{\mathbb{Z}}, (u', v'))$ signifie que la factorisation à l'extrême gauche est la même pour les deux morphismes dans Fl**Ab**. Dès lors, comme une surjection dans **Ab** est le conoyau de son noyau, les deux flèches à droites sont égales, c'est-à-dire $v = v'$.

Plénitude. Si on a $\alpha : \mathcal{E}(-, e) \Rightarrow \mathcal{E}(-, e')$, on a en fait les deux morphismes de gauche du diagramme ci-dessus; appelons celui du milieu $u$ (c'est en fait $\alpha_{1_{\mathbb{Z}}}$) et la factorisation qui en résulte à droite, appelons-la $v$. On obtient $(u, v)$ tel que $\alpha = \mathcal{E}(-, (u, v))$. $\square$

Le quotient est le conoyau.

Ici, une **Ab**-catégorie parfaite devrait être une catégorie abélienne.

## 3.8 2-Exemples

### 3.8.1 CGS

Reprenons les notations $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ =(plein essentiellement surjectif, fidèle), et $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$ =(essentiellement surjectif, plein et fidèle).

Comme $D(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$ engendre $\mathcal{E}_0$, le $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$-noyau revient à $K(f)(D(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$, qui n'est autre que le noyau (décrit dans [KV]). Il est utile de savoir que dans **CGS** - et cela découle du fait que l'on construit la factorisation ess.surj./pl.fidèle en prenant le conoyau du noyau d'un morphisme (voir [KV]) - tout morphisme essentiellement surjectif est le conoyau de son noyau. On peut alors appliquer le même raisonnement que pour **Ab** et prouver que $\mathcal{X} = \{D(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0, 1_{D(\mathbb{Z})}\}$ est une sous-catégorie dense de la catégorie des morphismes essentiellement surjectifs. Le $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$-noyau est donc bien le noyau et le $(\mathcal{E}_0, \mathcal{M}_0)$-quotient est le conoyau. Le noyau classifie les foncteurs pleins et fidèles, tandis que le conoyau classifie les morphismes pleins et essentiellement surjectifs.

Comme $\mathbb{Z}! \longrightarrow 0$ engendre $\mathcal{E}_1$, le $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$-noyau revient à $K(f)(\mathbb{Z}! \longrightarrow 0)$, ce qui donne en fait le *pépin* de $f$ (déjà défini dans [DV]; ce qui suit s'y trouve essentiellement). Tout d'abord voici quelques renseignements sur le pépin.

**Définition 3.31.** Soit une **CGS**-catégorie $\mathbb{C}$ avec objet zéro. Si $f : C_0 \longrightarrow C_1$, le *pépin* de $f$ est donné par $\operatorname{Pip} f$ et $\pi$ tels que $f\pi = 1_{f0}$, comme dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Pip} f \arrow[r, bend left, "0"] \arrow[r, bend right, "0"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\pi"] & C_0 \arrow[r, "f"] & C_1 \end{tikzcd} \tag{3.36}$$

et tel que pour tout autre $X$ et $\chi : 0 \Rightarrow 0 : X \longrightarrow C$ tels que $f\chi = 1_{f0}$, il existe une flèche unique à isomorphisme près $t : X \longrightarrow \operatorname{Pip} f$ telle que $\pi t = \chi$ modulo les isomorphismes canoniques entre flèches nulles.

Le quotient du pépin est la coracine, qui est le dual de la racine dont voici la définition.

**Définition 3.32.** Si on a $\alpha : 0 \Rightarrow 0 : C \longrightarrow C'$ dans $\mathbb{C}$, la *racine* de $f$ est une flèche $r : \operatorname{Root} f \longrightarrow C$ telle que $\alpha r = 1_{0r}$ et telle que pour tout autre $x : X \longrightarrow C$ tel que $\alpha x = 1_{0x}$, il existe $x' : X \longrightarrow \operatorname{Root} f$ avec un isomorphisme $\phi : rx' \Rightarrow x$, uniques à isomorphisme près.

Voici la construction du pépin et du copépin dans **CGS**: soit $F : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{H}$ un morphisme dans **CGS**.

1. Le pépin de $F$ est donné par le cat-groupe symétrique $\operatorname{Pip} F = D(\operatorname{Ker} \pi_1 F)$ et par la transformation naturelle monoïdale $\pi : 0 \Rightarrow 0 : \operatorname{Pip} F \longrightarrow \mathbb{G}$ dont la composante en $\sigma \in \operatorname{Pip} F$ est $\sigma$.
2. Le copépin de $F$ est donné par $\operatorname{Copip} F = (\operatorname{Coker} \pi_0 F)!$ et par $\varrho : 0 \Rightarrow 0 : \mathbb{H} \longrightarrow \operatorname{Copip} F$, dont la composante en $X \in \mathbb{H}$ est $\varrho_X = [X] : I \longrightarrow I$, la classe d'équivalence de $X$.

On remarque ici ce qui était annoncé dans le chapitre 2, c'est-à-dire que le fait que la dualité intervertit les systèmes de factorisation couplés, et le fait que d'une certaine façon chacun de ces systèmes est lié à une des dimensions de

**CGS**, sont mis en évidence de la façon suivante: la façon dont la colimite correspondant à une certaine limite est construite fait intervenir les dimensions de **CGS** de façon intervertie par rapport à la limite. Ainsi, $\mathrm{Pip}\, F = D(\mathrm{Ker}\, \pi_1 F)$ et $\mathrm{Copip}\, F = (\mathrm{Coker}\, \pi_0 F)!$. On observe le même phénomène au niveau des noyaux et des conoyaux (cfr. [KV]): $\pi_1(\mathrm{Ker}\, F) \cong \mathrm{Ker}\, \pi_1(F)$ tandis que $\pi_0(\mathrm{Coker}\, F) \cong \mathrm{Coker}\, \pi_0(F)$; et même $\pi_0(\mathrm{Ker}\, F) \cong \pi_1(\mathrm{Coker}\, F)$.

Ensuite, on peut prouver que tout morphisme plein et essentiellement surjectif est la coracine de son pépin, tandis que tout morphisme plein et fidèle est la racine de son copépin. On peut en déduire que la factorisation ess.surj/pl.fid peut être construite à la fois en faisant le conoyau du noyau, et la racine du copépin; tandis que l'autre factorisation s'obtient soit par la coracine du pépin, soit par le noyau du conoyau. On retrouve ainsi la situation de **Ab**, ou la factorisation surjections/injections s'obtient soit par le conoyau du noyau, soit par le noyau du conoyau; la différence ici est qu'au lieu d'un système de factorisation fixe, on a deux systèmes de factorisation couplés, et donc deux sortes de noyaux, deux sortes de conoyaux, ...

Maitenant, pour prouver que $\mathcal{X} = \{\mathbb{Z}! \longrightarrow 0, 1_{D(\mathbb{Z})}\}$ est une sous-catégorie dense, il suffit de suivre le même schéma que pour **Ab**, en utilisant ce qui vient d'être expliqué.

Une **CGS**-catégorie parfaite devrait être une 2-catégorie abélienne.

### 3.8.2 Cat

Pour le moment, je renvoie avant tout à l'article [BSS]. Dans les articles [CJSV], [Str1] et [Str2], et [Mak], il est question de bicatégories $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-régulières ou exactes pour différentes paires orthogonales sur **Cat**. Il faudrait clarifier tout cela.

# Bibliographie


[AESV] J. Adamek, R. El Bashir, M. Sobral et J. Velebil, *On functors which are lax epimorphisms*, Theory Appl. Categories **8**(2001), 509-521.

[BSS] R. Betti, D. Schumacher et R. Street, *Factorizations in bicategories*, prépublication: Dip. Mat. Politecnico di Milano n22/R, 1999.

[Bor2] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra II*, Cambridge University Press, 1994.

[CJKP] A. Carboni, G. Janelidze, G.M. Kelly et R. Paré, *On localization and stabilization for factorization systems*, Appl. Categorical Structures **5**(1997), 1-58.

[CJSV] A. Carboni, S. Johnson, R. Street et D. Verity, *Modulated bicategories*, J. Pure Appl. Algebra **94**(1994), 229-282.

[CHK] C. Cassidy, M.Hébert et G.M. Kelly, *Reflective subcategories, localizations and factorization systems*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **38**(1985), 287-329.

[DV] M. Dupont et E.M. Vitale, *Proper factorization systems in 2-categories*, prépublication.

[FK] P.J. Freyd et G.M. Kelly, *Categories of continuous functors I*, J. Pure Appl. Algebra **2**(1972), 169-191.

[Hov] M. Hovey, *Model categories*, Amer. Math. Soc., 1999.

[KV] S. Kasangian et E.M. Vitale, *Factorization systems for symmetric cat-groups*, Theory and Applications of Categories **7**(5)(2000), 47-70.

[Kel] G.M. Kelly, *Basic concepts of enriched category theory*, Cambridge University Press, 1982.

[Mak] M. Makkai, *Duality and definability in first order logic*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **503**(1993).

[Pic] R.A. Piccinini, *Lectures on Homotopy Theory*, North-Holland, 1992.

[Str1] R. Stree, *Two-dimensional sheaf theory*, J. Pure Appl. Algebra **23**(1982), 251-270.

[Str2] R. Street, *Characterization of bicategories of stacks*, Lect. Notes in Math. **962**(1982), 282-291.

[SW] R. Street, R.F.C. Walters, *The comprehensive factorization of a functor*, Bull. Amer. Math. Soc. **79**(1973), 936-941.