Université Catholique de Louvain

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Systèmes de factorisation dans les 2-catégories

Mémoire présenté par Mathieu Dupont
en vue de l'obtention du grade
de Licencié en Sciences Mathématiques

Promoteur : Enrico Vitale

Année académique 2000-2001

Je tiens à remercier mon promoteur, Enrico Vitale, qui m'a guidé durant la rédaction de ce travail.

Merci également à mes parents qui m'ont soutenu pendant ces quatre années d'études.

Table des matières

Introduction

Un système de factorisation sur une catégorie $\mathbf{C}$ est la donnée de deux classes de flèches $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ vérifiant certaines conditions de stabilité, une propriété d'orthogonalité des flèches de $\mathcal{E}$ par rapport à celles de $\mathcal{M}$ et telles que tout morphisme de $\mathbf{C}$ se factorise en un morphisme de $\mathcal{E}$ suivi d'un morphisme de $\mathcal{M}$. Depuis [K-T], on sait construire $\mathbf{C}^2$, la catégorie avec système de factorisation libre sur une catégorie $\mathbf{C}$. Un système de factorisation est propre si tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont des épis et tous ceux de $\mathcal{M}$ sont des monos. Dans [Gra] est construit Fr$\mathbf{C}$, la catégorie avec système de factorisation propre libre sur une catégorie $\mathbf{C}$. Le but de ce travail était de généraliser ces constructions libres aux 2-catégories.

Une première définition de système de factorisation dans une 2-catégorie se trouve dans [K-V], dans le cas des 2-catégories dont toutes les 2-flèches sont inversibles. Dans [Mil] se trouve une version pour toutes les 2-catégories, à partir de laquelle toutes les propriétés attendues (car valables dans les catégories) des systèmes de factorisation dans les 2-catégories sont prouvables. Mais il s'est avéré que pour obtenir les résultats de ce travail, il fallait renforcer la propriété d'orthogonalité, la rendant équivalente, comme c'était le cas dans les catégories (avec **Ens**), au fait qu'un certain diagramme dans **Cat** est un produit fibré.

Dans [K-V] sont définis deux systèmes de factorisation sur **CGS**, la 2-catégorie des cat-groupes symétriques. L'un d'entre eux est tel que si $e \in \mathcal{E}$, tous les foncteurs de composition à droite par e sont fidèles, et si $m \in \mathcal{M}$, tous les foncteurs de composition à gauche par m sont pleins et fidèles. Pour l'autre système de factorisation, c'est l'inverse. Cela a suggéré de considérer, pour généraliser les systèmes de factorisation propres, les systèmes de factorisation vérifiant l'une ou l'autre de ces propriétés.

Après avoir dans le chapitre 1 rappelé les définitions des 2-catégories, et dans le chapitre 2 rappelé les résultats connus dans les catégories sur les systèmes de factorisation, je donne la définition des systèmes de factorisation dans les 2-catégories dans le chapitre 3. D'abord je donne la nouvelle propriété d'orthogonalité et ses propriétés, puis je résume les résultats obtenus dans [Mil] sur les pseudo-systèmes de factorisations.

Le chapitre 4 est entièrement consacré à construire la 2-catégorie avec système de factorisation libre sur une 2-catégorie donnée, et à en démontrer la propriété universelle. Dans le chapitre 5, je fais de même, en considérant les systèmes de factorisation vérifiant des propriétés du type de celles rencontrées dans **CGS**.

Dans le chapitre 6 sont étudiés les exemples de **CGS** et **Cat** (la 2-catégorie des catégories). Pour **CGS**, je rappelle les résultats de [K-V]. Tout y est très clair. Quant à **Cat**, les connaissances sont beaucoup moins complètes. Je connais cinq systèmes de factorisation, mais il y en a sans doute au moins un sixième. Et je ne sais pas exprimer ces systèmes de factorisation en termes de quotients ou d'égalisateurs. De plus, contrairement à **CGS** où on sait qu'un foncteur F est essentiellement surjectif si et seulement si le foncteur de composition à droite par F est fidèle, on ne sait pas caractériser les propriétés de surjectivité dans **Cat** par des propriétés des foncteurs de composition à droite.

Chapitre 1

2-catégories et 3-catégories

1.1 2-catégories et pseudo-foncteurs

Une définition des 2-catégories et des concepts associés se trouve dans [Bor1] ou [K-S].

Définition 1.1. Une *2-catégorie* $\mathbf{C}$ est une catégorie enrichie (voir [Bor2]) dans la catégorie des catégories et des foncteurs entre elles. Cela revient à la donnée de :

1. une classe $\mathbf{C}_0$ d'objets ;
2. pour toute paire $A, B \in \mathbf{C}_0$, une catégorie $\mathbf{C}(A, B)$;
3. pour tout triplet $A, B, C \in \mathbf{C}_0$, un foncteur de composition $c_{ABC} : \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \longrightarrow \mathbf{C}(A, C)$;
4. pour tout objet A, un foncteur $u_A : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}(A, A)$, où $\mathbf{1}$ est la catégorie avec un objet et une seule flèche.

Appelons *1-flèches* de $\mathbf{C}$ les objets des catégories $\mathbf{C}(A, B)$ et *2-flèches* leurs morphismes. Si $\alpha : f \Rightarrow g$ et $\beta : g \Rightarrow h$ sont deux 2-flèches dans $\mathbf{C}(A, B)$, notons $\beta \circ \alpha$ ou $\beta\alpha$ leur composée dans la catégorie $\mathbf{C}(A, B)$. Si $f \in \mathbf{C}(A, B)$ et $g \in \mathbf{C}(B, C)$, notons $g \circ f$ ou $gf = c_{ABC}(f, g)$. Dans la situation suivante,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

notons $\beta * \alpha = c_{ABC}(\alpha, \beta)$. Notons aussi $1_A = u_A(*)$ et 1_f l'identité sur f dans $\mathbf{C}(A, B)$. La fonctorialité de la composition assure que dans le cas de figure suivant,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "f'" description] \arrow[r, bend right=50, "f''"'] & B \arrow[r, bend left=50, "g"] \arrow[r, "g'" description] \arrow[r, bend right=50, "g''"'] & C \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

nous avons $(\beta'\beta) * (\alpha'\alpha) = (\beta' * \alpha')(\beta * \alpha)$ (loi d'échange) ; cela permet d'écrire des diagrammes remplis par des 2-flèches sans ambiguïté.

Ces données doivent vérifier deux axiomes :

1. l'axiome d'associativité, c'est-à-dire $(hg)f = h(gf)$ et $(\gamma * \beta) * \alpha = \gamma * (\beta * \alpha)$;
2. l'axiome de l'unité, c'est-à-dire pour tout $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $f1_A = f = 1_B f$.

Exemple 1.2. Les catégories, les foncteurs et les transformations naturelles forment une 2-catégorie **Cat**.

Définition 1.3. Si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont deux 2-catégories, un *pseudo-foncteur* $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est la donnée de :

1. pour tout $C \in \mathbf{C}$, un objet $F(C) \in \mathbf{D}$;
2. pour toute paire $C, C' \in \mathbf{C}$, un foncteur $F_{CC'} : \mathbf{C}(C, C') \longrightarrow \mathbf{D}(FC, FC')$;
3. pour toute paire de 1-flèches $f : C \longrightarrow C'$ et $g : C' \longrightarrow C''$, une 2-flèche inversible $\kappa_{ff'} : Ff' \circ Ff \Rightarrow F(f'f)$ dans $\mathbf{D}$ (noté s'il n'y a pas d'ambiguïté κ ou κ^F) ;
4. pour tout objet $C \in \mathbf{C}$, une 2-flèche inversible $\iota_C : 1_{FC} \Rightarrow F1_C$ dans $\mathbf{D}$ (noté s'il n'y a pas d'ambiguïté ι ou ι^F).

Ces données doivent vérifier les propriétés suivantes :

1. pour toute situation du type 1.1 dans $\mathbf{C}$,

$$
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Ff'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\alpha"] \arrow[rr, bend right=60, "F(g'f')"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow \kappa"] & FB \arrow[r, bend left, "Fg"] \arrow[r, bend right, "Fg'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\beta"] & FC
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & FB \arrow[dr, "Fg"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \kappa"] & \\
FA \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, bend left, "F(gf)"] \arrow[rr, bend right, "F(g'f')"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow F(\beta * \alpha)"] & {} & FC;
\end{tikzcd}
\tag{1.3}
$$

2. (axiome de composition) pour tout triplet composable f, g, h dans $\mathbf{C}$,

$$
\begin{tikzcd}
FC' \arrow[r, "Fg"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \kappa"] & FC'' \arrow[d, "Fh"] \\
FC \arrow[u, "Ff"] \arrow[ur, "F(gf)" description] \arrow[r, "F(hgf)"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow \kappa"] & FC'''
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
FC' \arrow[r, "Fg"] \arrow[dr, "F(hg)" description] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \kappa"] & FC'' \arrow[d, "Fh"] \\
FC \arrow[u, "Ff"] \arrow[r, "F(hgf)"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \kappa"] & FC''';
\end{tikzcd}
\tag{1.4}
$$

3. (axiome de l'unité) pour toute flèche $f : C \longrightarrow C'$ dans $\mathbf{C}$,

$$
\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, bend left, "1_{FC}"] \arrow[r, bend right, "F1_C"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \iota"] \arrow[rr, bend right=60, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow \kappa"] & FC \arrow[r, "Ff"] & FC'
\end{tikzcd}
= Ff =
\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend right=60, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow \kappa"] & FC' \arrow[r, bend left, "1_{FC'}"] \arrow[r, bend right, "F1_{C'}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \iota"] & FC'.
\end{tikzcd}
\tag{1.5}
$$

Si tous les κ_{fg} et tous les ι_C se réduisent à l'identité, alors F est un *2-foncteur*.

Si $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{E}$ sont deux pseudo-foncteurs, le pseudo foncteur composé GF est donné par :

1. si $C \in \mathbf{C}$, $GF(C) = G(F(C))$;
2. si $C, C' \in \mathbf{C}$, $(GF)_{CC'} = G_{FC,FC'} \circ F_{CC'}$;
3. si nous avons $f : C \longrightarrow C'$ et $g : C' \longrightarrow C''$ dans $\mathbf{C}$, $\kappa^{GF}_{fg} = G(\kappa^F_{fg}) \circ \kappa^G_{Ff,Fg}$;
4. si $C \in \mathbf{C}$, $\iota^{GF}_C = G(\iota^F_C) \circ \iota^G_{FC}$.

La composition des pseudo-foncteurs est associative.

Définition 1.4. Si $F, G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ sont deux pseudo-foncteurs, une *transformation pseudo-naturelle* α entre eux est la donnée de :

1. pour tout objet $C \in \mathbf{C}$, une 1-flèche $\alpha_C : FC \longrightarrow GC$;
2. pour toute 1-flèche $f : C \longrightarrow C'$ dans $\mathbf{C}$, une 2-flèche inversible α_f :

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha_f \nearrow"] & GC \arrow[d, "Gf"] \\ FC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & GC'. \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Ces données doivent vérifier les axiomes suivants.

1. Pour toute 2-flèche $\gamma : f \Rightarrow f' : C \longrightarrow C'$ dans $\mathbf{C}$,

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, bend right=40, "Ff"'] \arrow[d, bend left=40, "Ff'"] \arrow[d, phantom, "\overset{F\gamma}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_{f'}}{\Rightarrow}"] & GC \arrow[d, "Gf'"] \\ FC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & GC' \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_f}{\Rightarrow}"] & GC \arrow[d, bend right=40, "Gf"'] \arrow[d, bend left=40, "Gf'"] \arrow[d, phantom, "\overset{G\gamma}{\Rightarrow}"] \\ FC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & GC'. \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

2. Pour tout $C \in \mathbf{C}$,

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, bend right=40, "1_{FC}"'] \arrow[d, bend left=40, "F1_C"] \arrow[d, phantom, "\overset{\iota^F}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_{1_C}}{\Rightarrow}"] & GC \arrow[d, "G1_C"] \\ FC \arrow[r, "\alpha_C"'] & GC \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\alpha_C"] & GC \arrow[r, bend left=30, "G1_C"] \arrow[r, bend right=30, "1_{GC}"'] \arrow[r, phantom, "\iota^G \Uparrow"] & GC. \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

3. Pour toutes 1-flèches $f : C \longrightarrow C'$ et $g : C' \longrightarrow C''$ dans $\mathbf{C}$,

$$
\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_f}{\Rightarrow}"] & GC \arrow[d, "Gf"] \arrow[dd, bend left, "G(gf)"] \\
FC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_g}{\Rightarrow}"] & GC' \arrow[d, "Gg"] \overset{\kappa^G}{\Rightarrow} \\
FC'' \arrow[r, "\alpha_{C''}"'] & GC''
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dd, bend left, "F(gf)"] & GC \arrow[dd, bend left, "G(gf)"] \\
FC' \overset{\kappa^F}{\Rightarrow} \arrow[d, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\alpha_{gf}}{\Rightarrow}"] & {} \\
FC'' \arrow[r, "\alpha_{C''}"'] & GC''.
\end{tikzcd}
\tag{1.9}
$$

Si F et G sont des 2-foncteurs et si pour toute 1-flèche f dans $\mathbf{C}$, α_f est l'identité, alors α est une *transformation 2-naturelle.*

Si $\alpha : F \Rightarrow G$ et $\beta : G \Rightarrow H$ sont deux transformations pseudo-naturelles entre pseudo-foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$, la composée verticale $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow G$ est donnée par :

1. si $C \in \mathbf{C}$, posons $(\beta\alpha)_C = \beta_C \circ \alpha_C$;
2. si $f : C \longrightarrow C'$ dans $\mathbf{C}$, posons $(\beta\alpha)_f =$

$$
\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_f}{\Rightarrow}"] & GC \arrow[r, "\beta_C"] \arrow[d, "Gf"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta_f}{\Rightarrow}"] & HC \arrow[d, "Hf"] \\
FC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & GC' \arrow[r, "\beta_{C'}"'] & HC'.
\end{tikzcd}
\tag{1.10}
$$

Cette composition est associative.

Si $\alpha : F \Rightarrow F' : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ et $\beta : G \Rightarrow G' : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{E}$ sont deux transformations pseudo-naturelles, il y a deux possibilités différentes (mais isomorphes) pour définir la composée horizontale $\beta * \alpha : GF \Rightarrow G'F'$. Si $C \in \mathbf{C}$, nous prendrons $(\beta * \alpha)_C = \beta_{F'C} \circ G(\alpha_C)$ (l'alternative étant $G'(\alpha_C) \circ \beta_{FC}$), tandis que si $f : C \longrightarrow C'$ dans $\mathbf{C}$, nous prendrons pour $(\beta * \alpha)_f$ la 2-flèche

$$
\begin{tikzcd}
GFC \arrow[r, "G\alpha_C"] \arrow[d, "GFf"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{G\alpha_f}{\Rightarrow}"] & GF'C \arrow[r, "\beta_{F'C}"] \arrow[d, "GF'f"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta_{F'f}}{\Rightarrow}"] & G'F'C \arrow[d, "G'F'f"] \\
GFC' \arrow[r, "G\alpha_{C'}"'] & GF'C' \arrow[r, "\beta_{F'C'}"'] & G'F'C'.
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

Cette composition horizontale n'est pas associative, mais nous avons une 2-flèche inversible $\Upsilon_C = \gamma_{G'F'C} * \kappa^H_{G\alpha_C,\beta_{F'C}} : ((\gamma * \beta) * \alpha)_C = \gamma_{G'F'C} \circ H\beta_{F'C} \circ HG\alpha_C \Rightarrow$

$\gamma_{G'F'C} \circ H(\beta_{F'C} \circ G\alpha_C) = (\gamma*(\beta*\alpha))_C$; toutes ces 2-flèches forment une modification inversible (voir la définition suivante) $\Upsilon_{\alpha\beta\gamma} : (\gamma * \beta) * \alpha \Rrightarrow \gamma * (\beta * \alpha)$.

De même, la loi d'échange n'est pas vérifiée, mais nous avons $(\Omega_{\alpha\alpha'\beta\beta'})_C : ((\beta'\beta)*(\alpha'\alpha))_C = \beta'_{F''C} \circ \beta_{F''C} \circ G(\alpha'_C \circ \alpha_C) \Rightarrow \beta'_{F''C} \circ G'\alpha'_C \circ \beta_{F'C} \circ G\alpha_C = (\beta'*\alpha')_C(\beta*\alpha)_C$:

$$\begin{tikzcd}
GFC \arrow[rr, "G(\alpha'_C\alpha_C)"] \arrow[dr, "G\alpha_C"'] & \arrow[d, phantom, "\kappa^{-1}\Downarrow"] & GF''C \arrow[r, "\beta_{F''C}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta_{\alpha'_C}"] & G'F''C \arrow[r, "\beta'_{F''C}"] & G''F''C, \\
& GF'C \arrow[ur, "G\alpha'_C"] \arrow[r, "\beta_{F'C}"'] & G'F'C \arrow[ur, "G'\alpha'_C"'] & &
\end{tikzcd} \tag{1.12}$$

ce qui donne une modification inversible $\Omega_{\alpha\alpha'\beta\beta'} : (\beta'\beta) * (\alpha'\alpha) \Rrightarrow (\beta' * \alpha')(\beta * \alpha)$.

Définition 1.5. Si $\alpha, \beta : F \Rightarrow G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ sont des transformations pseudo-naturelles, une *modification* $\Gamma : \alpha \Rrightarrow \beta$ est la donnée, pour tout $C \in \mathbf{C}$, d'une 2-flèche $\Gamma_C : \alpha_C \Rightarrow \beta_C$. Cette donnée doit être telle que pour tout $f : C \longrightarrow C'$ dans $\mathbf{C}$, l'axiome suivant soit vérifié :

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, bend left, "\beta_C"] \arrow[r, bend right, "\alpha_C"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_C\Uparrow"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha_f\Uparrow"] & GC \arrow[d, "Gf"] \\
FC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & GC'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\beta_C"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\beta_f\Uparrow"] & GC \arrow[d, "Gf"] \\
FC' \arrow[r, bend left, "\beta_{C'}"] \arrow[r, bend right, "\alpha_{C'}"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_{C'}\Uparrow"] & GC'.
\end{tikzcd} \tag{1.13}$$

Si $\Gamma : \alpha \Rrightarrow \beta$ et $\Delta : \beta \Rrightarrow \gamma$ sont deux modifications, nous pouvons définir une modification composée $\Delta \circ \Gamma : \alpha \Rrightarrow \gamma$. Si $C \in \mathbf{C}$, posons $(\Delta\Gamma)_C = \Delta_C \circ \Gamma_C$.

Dans la situation suivante,

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\alpha'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma"] & G \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\beta'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Delta"] & H
\end{tikzcd} \tag{1.14}$$

nous pouvons définir une modification $\Delta * \Gamma : \beta\alpha \Rrightarrow \beta'\alpha'$. Si $C \in \mathbf{C}$, posons $(\Delta * \Gamma)_C = \Delta_C * \Gamma_C$. Les deux compositions des modifications que je viens de décrire sont associatives.

Enfin, à partir de deux modifications $\Gamma : \alpha \Rrightarrow \alpha' : F \Rightarrow G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ et $\Delta : \beta \Rrightarrow \beta' : H \Rightarrow K : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{E}$, nous pouvons définir une modification $\Delta \diamond \Gamma : \beta * \alpha \Rrightarrow \beta' * \alpha'$. Si $C \in \mathbf{C}$, posons $(\Delta \diamond \Gamma)_C = \Delta_{GC} * H(\Gamma_C) : \beta_{GC} \circ H\alpha_C \Rightarrow \beta'_{GC} \circ H\alpha'_C$. Cette composition ne peut être associative puisque les domaines et codomaines de $\Theta \diamond (\Delta \diamond \Gamma)$ et $(\Theta \diamond \Delta) \diamond \Gamma$ ne coïncident pas, mais l'associativité modulo les modifications Υ définies plus haut est vérifiée : $(\Theta \diamond (\Delta \diamond \Gamma)) \circ \Upsilon_{\alpha\beta\gamma} = \Upsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} \circ ((\Theta \diamond \Delta) \diamond \Gamma)$.

Définissons maintenant une notion de produit fibré dans les 2-catégories qui sera utile ultérieurement.

Définition 1.6. Soit $f : A \longrightarrow C$ et $g : B \longrightarrow C$ deux 1-flèche dans une 2-catégorie $\mathbf{C}$. Un *pseudo-bi-produit fibré* de f et g est donné par un objet P, deux 1-flèches $p_1 : P \longrightarrow A$ et $p_2 : P \longrightarrow B$ et une 2-flèche inversible $\varphi : gp_2 \Rightarrow fp_1$ tels que pour tout autre $(P', p'_1, p'_2, \varphi')$ du même type, il existe une 1-flèche $t : P' \longrightarrow P$ et deux 2-flèches inversibles $\omega_1 : p_1 t \Rightarrow p'_1$ et $\omega_2 : p_2 t \Rightarrow p'_2$ tels que $(f * \omega_1)(\varphi * t) = \varphi'(g * \omega_2)$ (voir le diagramme suivant) et tels que pour tout autre triplet $(t', \omega'_1, \omega'_2)$ du même type, il existe un unique $\sigma : t' \Rightarrow t$ tel que $\omega_1(p_1 * \sigma) = \omega'_1$ et $\omega_2(p_2 * \sigma) = \omega'_2$.

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, bend left, "p'_2"] \arrow[ddr, bend right, "p'_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\varphi"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd} \tag{1.15}$$

La notion raisonnable d'égalité entre objets dans une 2-catégorie est celle d'équivalence, qui est une généralisation à une 2-catégorie quelconque de la notion d'équivalence de catégories.

Définition 1.7. Une 1-flèche $f : C \longrightarrow C'$ dans une 2-catégorie $\mathbf{C}$ est une *équivalence* s'il existe une 1-flèche $f' : C' \longrightarrow C$ et des 2-flèches inversibles $\eta : 1_{C'} \Rightarrow ff'$ et $\varepsilon : f'f \Rightarrow 1_C$ qui vérifient les identités triangulaires :

$$\begin{tikzcd}
& C' \arrow[rr, "1_{C'}"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & C' \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "1_C"'] & & C \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
C \xrightarrow{f} C' \tag{1.16}$$

et

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[rr, "1_C"] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & C \\
C' \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "1_{C'}"'] & & C' \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
C' \xrightarrow{f'} C. \tag{1.17}$$

Donnons pour terminer cette section des versions 2-catégorielles d'adjonction et d'équivalence.

Définition 1.8. Soit $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ deux pseudo-foncteurs. F est un *pseudo-adjoint à gauche* de G ($F \dashv G$) s'il existe une transformation pseudo-naturelle $\eta : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow GF$ telle que pour tout $C \in \mathbf{C}$, pour tout $D \in \mathbf{D}$ et pour tout $f : C \longrightarrow GD$, il existe $g : FC \longrightarrow D$ et $\alpha : Gg \circ \eta_C \Rightarrow f$ inversible tels que pour tout $g' : FC \longrightarrow D$ et pour tout $\alpha' : Gg' \circ \eta_C \Rightarrow f$ inversible, il existe un unique $\omega : g' \Rightarrow g$ inversible tel que $\alpha \circ (G\omega * \eta_C) = \alpha'$.

Définition 1.9. Un pseudo-foncteur $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ entre 2-catégories est une *biéquivalence* si

1. pour tous $C, C' \in \mathbf{C}$, $F_{CC'} : \mathbf{C}(C, C') \longrightarrow \mathbf{D}(FC, FC')$ est une équivalence de catégories ;
2. pour tout $D \in \mathbf{D}$, il existe $C \in \mathbf{C}$ et $f : FC \longrightarrow D$ équivalence dans la 2-catégorie $\mathbf{D}$.

1.2 3-catégories

Une définition complète de tricatégorie se trouve dans [GPS]. Je n'aurai pas besoin de tous les axiomes, étant donné que dans les cas qui vont intervenir par la suite, même si ce n'est pas une 3-catégorie stricte (c'est-à-dire une catégorie enrichie dans la catégorie des 2-catégories et des 2-foncteurs), beaucoup d'isomorphismes de cohérence sont des identités.

Définition 1.10. Une *tricatégorie* $\mathbf{C}$ est la donnée de :

1. une classe $\mathbf{C}_0$ d'objets ;
2. pour toute paire $A, B \in \mathbf{C}_0$, une bicatégorie $\mathbf{C}(A, B)$;
3. pour tout triplet $A, B, C \in \mathbf{C}_0$, un bifoncteur de composition $c_{ABC} : \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \longrightarrow \mathbf{C}(A, C)$;
4. pour tout objet A, un bifoncteur $u_A : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}(A, A)$.

Ces données sont soumises à certains axiomes qui se trouvent dans [GPS].

Exemple 1.11. Considérons désormais la tricatégorie 2-$\mathbf{Cat}$ des 2-catégories, pseudo-foncteurs, transformations pseudo-naturelles et modifications. Dans ce cas, pour toutes 2-catégories $\mathbf{C}, \mathbf{D}$, nous avons une 2-catégorie 2-$\mathbf{Cat}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$, au lieu d'une bicatégorie en général. Je ne rappellerai donc pas ce qu'est une bicatégorie. De même, la composition est un pseudo-foncteur $C_{\mathbf{ABC}}$ au lieu d'un bifoncteur, et l'unité un pseudo-foncteur $U_{\mathbf{A}}$.

Les différentes compositions ont été définies au cours de la section 1.1. Nous avons déjà remarqué que la composition horizontale des transformation pseudo-naturelles n'était pas strictement associative. Nous avons aussi remarqué que la loi d'échange n'est pas vérifiée strictement, mais à une 2-flèche inversible (1.12) près, c'est-à-dire, que la composition $C_{\mathbf{ABC}}$ est seulement un pseudo-foncteur et non un 2-foncteur.

Tous les exemples de tricatégories rencontrés dans la suite sont des dérivés de 2-$\mathbf{Cat}$. Je les appellerai dorénavant 3-catégories même si ce ne sont pas des 3-catégories strictes.

Dans [GPS] sont définis les trifoncteurs, mais comme seuls interviendront dans la suite des 3-foncteurs stricts, je me limiterai à en donner une définition.

Définition 1.12. Si $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ sont deux 3-catégories, un *3-foncteur* (strict) $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est la donnée pour chaque $C \in \mathbf{C}$, d'un objet $FC \in \mathbf{D}$ et pour tous $C, C' \in \mathbf{C}$ d'un 2-foncteur $F_{CC'} : \mathbf{C}(C, C') \longrightarrow \mathbf{D}(FC, FC')$. Ces données doivent vérifier : $F(gf) = Fg \circ Ff$, $F(\beta * \alpha) = F\beta * F\alpha$, $F(\Delta \diamond \Gamma) = F\Delta \diamond F\Gamma$ et $F1_C = 1_{FC}$.

Dans [GPS] sont définies les transformations trinaturelles. Ici, nous ne rencontrerons qu'une version plus faible dont je décris les données ici, sans donner les axiomes.

Définition 1.13. Si $F, G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ sont deux 3-foncteurs, une *transformation faiblement 3-naturelle* est la donnée, pour tout $C \in \mathbf{C}$ d'une 1-flèche $\alpha_C : FC \longrightarrow GC$ et pour toute 1-flèche $f : C \longrightarrow C'$ dans $\mathbf{C}$, d'une 2-flèche équivalence dans la 2-catégorie $\mathbf{D}(FC, GC')$:

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha_f \nearrow"] & GC \arrow[d, "Gf"] \\
FC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & GC'.
\end{tikzcd} \tag{1.18}$$

De plus, pour toutes flèches $f : C \longrightarrow C'$ et $g : C' \longrightarrow C''$ dans $\mathbf{C}$, nous donnons une 3-flèche inversible $\Theta_{f,g}$:

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] & GC \arrow[d, "Gf"] \\
FC' \arrow[r, phantom, "\overset{\alpha_{gf}}{\Rightarrow}"] \arrow[d, "Fg"'] & GC' \arrow[d, "Gg"] \\
FC'' \arrow[r, "\alpha_{C''}"'] & GC''
\end{tikzcd}
\quad \Rrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_f}{\Rightarrow}"] & GC \arrow[d, "Gf"] \\
FC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_g}{\Rightarrow}"] & GC' \arrow[d, "Gg"] \\
FC'' \arrow[r, "\alpha_{C''}"'] & GC''.
\end{tikzcd} \tag{1.19}$$

Définissons enfin une notion d'adjonction à ce niveau.

Définition 1.14. Soit $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$, deux 3-foncteurs. F est *3-adjoint à gauche* de G s'il existe une transformation faiblement 3-naturelle $\eta : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow GF$ telle que pour tout $C \in \mathbf{C}$ et pour tout $D \in \mathbf{D}$, $G(-) \circ \eta_C : \mathbf{C}(FC, D) \longrightarrow \mathbf{D}(C, GD)$ est une biéquivalence.

Chapitre 2

Systèmes de factorisation dans les catégories

2.1 Définition et propriétés

Commençons par définir les systèmes de factorisations dans les catégories puis récapitulons leurs propriétés, qui peuvent être trouvées dans [Bou], [CJKP] et [F-K]. Fixons une catégorie $\mathbf{C}$.

Définition 2.1. Un morphisme f est *orthogonal* par rapport à un morphisme g dans $\mathbf{C}$ (notons cela $f \downarrow g$) si pour tout u, v tels que $vf = gu$, il existe un unique w tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \arrow[dl, "w"'] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Si $\mathcal{H}$ est une classe de flèches de $\mathbf{C}$, notons $\mathcal{H}^{\uparrow} = \{e \,|\, e \downarrow h \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}$ et $\mathcal{H}^{\downarrow} = \{m \,|\, h \downarrow m \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}$.

Proposition 2.2. *Soit $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ deux morphismes d'une catégorie $\mathbf{C}$. $f \downarrow g$ si et seulement si le diagramme suivant (dans* **Ens***) est un produit fibré.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(B,C) \arrow[r, "\mathbf{C}(B,g)"] \arrow[d, "\mathbf{C}(f,C)"'] & \mathbf{C}(B,D) \arrow[d, "\mathbf{C}(f,D)"] \\ \mathbf{C}(A,C) \arrow[r, "\mathbf{C}(A,g)"'] & \mathbf{C}(A,D) \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Définition 2.3. Un *système de factorisation* dans $\mathbf{C}$ est une paire $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de classes de flèches de $\mathbf{C}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. si $m \in \mathcal{M}$ et i est un iso alors $mi \in \mathcal{M}$, et si $e \in \mathcal{E}$ et i est un iso alors $ie \in \mathcal{E}$;
2. pour toute flèche f dans $\mathbf{C}$, il existe $e \in \mathcal{E}$ et $m \in \mathcal{M}$ tels que $f = me$;
3. si $e \in \mathcal{E}$ et $m \in \mathcal{M}$ alors $e \downarrow m$.

Un système de factorisation est *propre* si tout morphisme de $\mathcal{E}$ est un épi et tout morphisme de $\mathcal{M}$ est un mono.

Il est facile de déduire de la définition les propriétés suivantes.

Proposition 2.4. *Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ un système de factorisation dans $\mathbf{C}$.*

1. *$\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \{isos\}$.*
2. *$\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ sont fermés sous composition.*
3. *$\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\uparrow}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{E}^{\downarrow}$.*
4. *La $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorisation d'une flèche de $\mathbf{C}$ est essentiellement unique.*
5. *$\mathcal{M}$ est stable sous limites ; par dualité, $\mathcal{E}$ est stable sous colimites.*
6. *Si f et $fg \in \mathcal{M}$ alors $g \in \mathcal{M}$; par dualité, si g et $fg \in \mathcal{E}$, alors $f \in \mathcal{E}$.*

Voici maintenant quelques exemples.

Exemple 2.5. Dans toute catégorie $\mathbf{C}$, il y a deux systèmes de factorisations triviaux : l'un où $\mathcal{E}$ est constitué des isos et $\mathcal{M}$ de toutes les flèches ($f : C \longrightarrow C'$ est factorisé en $f = f1_C$), et l'autre où c'est l'inverse ($f : C \longrightarrow C'$ est factorisé en $f = 1_{C'}f$).

Exemple 2.6. L'exemple de base est celui de la catégorie **Ens** où nous prenons pour $\mathcal{E}$ les surjections et pour $\mathcal{M}$ les injections et nous factorisons les fonctions à travers leur image.

Exemple 2.7. Dans les catégories régulières, les épis réguliers et les monos forment un système de factorisation.

2.2 Catégories avec système de factorisation libres

Considérons la 2-catégorie $\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ des catégories munies d'un système de factorisation, des foncteurs entre elles tels que $F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$ et $F(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$, et des transformations naturelles. Il y a un 2-foncteur d'oubli $U : \mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$. Nous allons construire un 2-foncteur $(.)^2 : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ adjoint à gauche de U.

Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, $\mathbf{C}^2$, la catégorie des flèches de $\mathbf{C}$, a pour objets les flèches de $\mathbf{C}$ et si $f : C \longrightarrow C'$ et $g : D \longrightarrow D'$ sont deux flèches dans $\mathbf{C}$, un morphisme de f vers g est une paire (u, v) telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "g"] \\ C' \arrow[r, "v"'] & D' \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Munissons $\mathbf{C}^2$ du système de factorisation où $\mathcal{E} = \{(u,v) : f \longrightarrow g \mid u \text{ est un iso}\}$ et $\mathcal{M} = \{(u,v) : f \longrightarrow g \mid v \text{ est un iso}\}$; une flèche $(u,v) : f \longrightarrow g$ est factorisée en $(u,v) = (u, 1_{D'}) \circ (1_C, v)$ (voir le diagramme suivant).

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "vf=gu"] & D \arrow[d, "g"] \\ C' \arrow[r, "v"'] & D' \arrow[r, "1_{D'}"'] & D' \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Si $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est un foncteur, définissons $F^2 : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{D}^2$ sur les objets par $F^2(f) = Ff$, et sur les flèches par $F^2(u,v) = (Fu, Fv)$. F^2 préserve les systèmes de factorisations car F préserve les isos.

Enfin, si $\alpha : F \Rightarrow G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est une transformation naturelle, prenons pour $(\alpha^2)_f : F^2(f) \longrightarrow G^2(f)$ la paire $(\alpha_C, \alpha_{C'})$, qui est bien une flèche de $\mathbf{D}^2$, par naturalité de α :

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] & GC \arrow[d, "Gf"] \\ FC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & GC'. \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Nous aboutissons au théorème suivant (voir [K-T] et [Gra]).

Théorème 2.8. *Le 2-foncteur* $(.)^2 : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ *est pseudo-adjoint à gauche du 2-foncteur d'oubli* $U : \mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$. *De plus, la 2-catégorie* $\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ *est pseudo-monadique, autrement dit il y a une biéquivalence entre* $\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ *et* $\mathbf{PsAlg}((.)^2)$*, la 2-catégorie des algèbres de la pseudo-monade engendrée par l'adjonction. L'unité de l'adjonction est donnée par* $E_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^2$ *qui envoie* C *sur* 1_C *et* $f : C \longrightarrow C'$ *sur* $(f,f) : 1_C \longrightarrow 1_{C'}$.

Les définitions de pseudo-monade et de la 2-catégorie des algèbres pour une pseudo-monade se trouvent dans l'article [Mar]. Remarquons tout de même qu'une algèbre pour la pseudo-monade $((.)^2, E, M)$ est un foncteur $K : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ avec deux transformations naturelles inversibles γ et α :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "E_{\mathbf{C}}"] \arrow[dr, "1_{\mathbf{C}}"'] & \mathbf{C}^2 \arrow[d, "K"] \arrow[dl, phantom, "\Nearrow \gamma"] \\ & \mathbf{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathbf{C}^2)^2 \arrow[r, "M_{\mathbf{C}}"] \arrow[d, "K^2"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \alpha"] & \mathbf{C}^2 \arrow[d, "K"] \\ \mathbf{C}^2 \arrow[r, "K"'] & \mathbf{C}. \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Ces données sont soumises à certains axiomes (voir [Mar]). En fait, dans [K-T], il est montré que donner un système de factorisation revient à donner un foncteur $K : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ et une transformation naturelle inversible $\gamma : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow KE_{\mathbf{D}}$ qui vérifient une certaine condition dont l'énoncé demande des préparatifs. Une flèche se factorise dans $\mathbf{C}$ en factorisant $E_{\mathbf{C}}(f) = (f, f)$ dans $\mathbf{C}^2$, comme dans le diagramme suivant, puis en appliquant le foncteur K.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "1_C"'] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & C' \arrow[d, "1_{C'}"] \\
C \arrow[r, "f"'] & C' \arrow[r, "1_{C'}"'] & C'
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Nous obtenons ainsi une factorisation $f = m_f e_f$, où $m_f = \gamma_{C'}^{-1} \circ K(f, 1_{C'})$ et $e_f = K(1_C, f) \circ \gamma_C$.

$$\begin{tikzcd}
K1_C \arrow[r, "K(1_C,f)"] & Kf \arrow[r, "K(f,1_{C'})"] \arrow[dr, "m_f"] & K1_{C'} \arrow[d, "\gamma_{C'}^{-1}"] \\
C \arrow[u, "\gamma_C"] \arrow[ur, "e_f"] \arrow[rr, "f"'] & & C'
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Posons $\mathcal{E}_K = \{f \,|\, m_f \text{ est un iso}\}$ et $\mathcal{M}_K = \{f \,|\, e_f \text{ est un iso}\}$. Le résultat de [K-T] est le suivant.

Théorème 2.9. *Si pour tout morphisme f, $e_f \in \mathcal{E}_K$ et $m_f \in \mathcal{M}_K$, alors $(\mathcal{E}_K, \mathcal{M}_K)$ est un système de factorisation sur $\mathbf{C}$.*

Maintenant, considérons la sous-2-catégorie pleine $\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}}$ de $\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ dont les objets sont les catégories avec système de factorisation *propre* (voir définition 2.3). Il y a à nouveau un foncteur d'oubli $U' : \mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$, et dans [Gra] est construit un pseudo-adjoint à gauche $\mathrm{Fr} : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}}$.

Si $\mathbf{C}$ est une 2-catégorie, $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ est la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathbf{C}^2$ et si $f, g \in \mathbf{C}^2$, $\mathrm{Fr}\mathbf{C}(f, g) = \mathbf{C}^2(f, g)/\sim$ où $(u, v) \sim (u', v')$ si et seulement si $gu = gu'$ (ou de manière équivalente, $vf = v'f$). Notons $[u, v]$ la classe d'équivalence de (u, v). Les flèches de $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ se factorisent comme celles de $\mathbf{C}^2$, ce qui donne un système de factorisation propre, où $\mathcal{E} = \{[u, v] : f \longrightarrow g \,|\, \text{il existe } u' : D \longrightarrow C \text{ tel que } guu' = g\}$ et $\mathcal{M} = \{[u, v] : f \longrightarrow g \,|\, \text{il existe } v' : D' \longrightarrow C' \text{ tel que } v'vf = f\}$.

Si $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, définissons $\mathrm{Fr}F : \mathrm{Fr}\mathbf{C} \longrightarrow \mathrm{Fr}\mathbf{D}$ par $\mathrm{Fr}F(f) = F^2(f) = Ff$ et $\mathrm{Fr}F([u, v]) = [Fu, Fv]$. Il est facile de voir que $\mathrm{Fr}F$ est bien défini. De plus, posons $(\mathrm{Fr}\alpha)_f = [\alpha_C, \alpha_{C'}]$.

Nous obtenons alors le théorème suivant (voir [Gra]).

Théorème 2.10. *Le 2-foncteur $\mathrm{Fr} : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}}$ est pseudo-adjoint à gauche du 2-foncteur d'oubli $U' : \mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$. De plus, la 2-catégorie $\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}}$ est pseudo-monadique (il y a une biéquivalence entre $\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}}$ et $\mathbf{PsAlg}(\mathrm{Fr})$). L'unité de l'adjonction est donnée par $E'_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathrm{Fr}\mathbf{C}$ qui envoie C sur 1_C et $f : C \longrightarrow C'$ sur $[f, f] : 1_C \longrightarrow 1_{C'}$.*

Chapitre 3

Pseudo-systèmes de factorisation

3.1 Propriété d'orthogonalité dans une 2-catégorie

Une première version 2-catégorielle de la propriété d'orthogonalité (2.1) avait été introduite dans l'article [K-V] pour une 2-catégorie dont toutes les 2-flèches sont inversibles. Dans [Mil], la même propriété est reprise pour une 2-catégorie quelconque et permet de démontrer les propriétés simples attendues d'une version 2-catégorielle de système de factorisation. Mais il s'est avéré au cours de mon travail qu'une version plus forte (mais se ramenant à la première dans le cas où toutes les 2-flèches sont inversibles) était nécessaire pour obtenir la caractérisation de la propriété d'orthogonalité en terme de limite (comme la proposition 2.2) et la propriété universelle des 2-catégories avec système de factorisation libres. Mais définissons d'abord la 2-catégorie des flèches d'une 2-catégorie $\mathbf{C}$ (introduite dans [Mil]).

Définition 3.1. Si $\mathbf{C}$ est une 2-catégorie, la 2-catégorie des flèches $\mathbf{C}^2$ a pour objets les 1-flèches de $\mathbf{C}$, pour 1-flèches de f vers g les triplets (u, φ, v), comme dans le diagramme suivant, où φ est inversible,

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\varphi\Nearrow"] & D \arrow[d, "g"] \\
C' \arrow[r, "v"'] & D'
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

et pour 2-flèches les paires $(\alpha, \beta) : (u, \varphi, v) \Rightarrow (w, \psi, x) : f \longrightarrow g$ où $\alpha : u \Rightarrow w$, $\beta : v \Rightarrow x$ sont tels que

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, bend left, "w"] \arrow[r, bend right, "u"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Uparrow"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\varphi\Uparrow"] & D \arrow[d, "g"] \\
C' \arrow[r, "v"'] & D'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "w"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\psi\Uparrow"] & D \arrow[d, "g"] \\
C' \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\beta\Uparrow"] & D'.
\end{tikzcd}
\tag{3.2}
$$

Définition 3.2. Soit $\mathbf{C}$ une 2-catégorie et $(u, \varphi, v) \in \mathbf{C}^2(f, g)$. Un *remplissage* de (u, φ, v) est un triplet (α, s, β), où $s : C' \longrightarrow D$, $\alpha : sf \Rightarrow u$ et $\beta : gs \Rightarrow v$, et où α et β sont inversibles, tel que $g * \alpha = \varphi(\beta * f)$.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha \Leftarrow", pos=0.25] & C' \arrow[d, "v"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow \beta", pos=0.75, shift right=4ex] \\
D \arrow[r, "g"'] & D'
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Un remplissage est *universel* si pour tout autre remplissage (γ, t, δ) de (u, φ, v), il existe un unique $\omega : t \Rightarrow s$ inversible tel que $\gamma = \alpha(\omega * f)$ et $\delta = \beta(g * \omega)$.

Voici maintenant la propriété d'orthogonalité dans les 2-catégories.

Définition 3.3. Soit $f : C \longrightarrow C'$ et $g : D \longrightarrow D'$ deux flèches dans une 2-catégorie $\mathbf{C}$. f est *orthogonal* par rapport à g (noté $f \downarrow g$) si

1. pour tout morphisme $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$, il existe un remplissage universel de (u, φ, v) ;
2. pour tout $(u, \varphi, v), (u', \varphi', v') : f \longrightarrow g$, pour tout $(\mu, \nu) : (u, \varphi, v) \Rightarrow (u', \varphi', v')$ dans $\mathbf{C}^2$, pour tous remplissages universels (α, s, β) et (α', s', β') respectivement de (u, φ, v) et de (u', φ', v'), il existe une unique 2-flèche $\sigma : s \Rightarrow s'$ telle que

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, bend right=40, "u'"'] \arrow[d, bend left=40, "u"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mu}"] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow \alpha", pos=0.3] & C' \arrow[dl, "s"] \\
D &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha' \Leftarrow", pos=0.2] & C' \arrow[dl, bend right=20, "s'"'] \arrow[dl, bend left=20, "s"] \arrow[dl, phantom, "\sigma \Uparrow"] \\
D &
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

et

$$\begin{tikzcd}
& C' \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, bend right=40, "v"'] \arrow[d, bend left=40, "v'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\nu}{\Rightarrow}"] \arrow[dl, phantom, "\beta \Rightarrow", pos=0.7, shift left=4ex] \\
D \arrow[r, "g"'] & D'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& C' \arrow[dl, bend right=20, "s"'] \arrow[dl, bend left=20, "s'"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow \sigma"] \arrow[d, "v'"] \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow \beta'", pos=0.7, shift left=6ex] \\
D \arrow[r, "g"'] & D'.
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

L'ancienne version de cette propriété (dans les articles [K-V] et [Mil]) ne comportait que la condition 1. ; la condition 2. s'y ramène dans le cas où toutes les 2-flèches sont inversibles.

Voici quelques propriétés utiles.

Proposition 3.4. *1. S'il existe un remplissage universel de $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$, alors tout remplissage de (u, φ, v) est universel.*

2. *$f \downarrow g$ si et seulement si*
   (a) *pour tout $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$, il existe un remplissage de (u, φ, v) ;*
   (b) *pour tout $(u, \varphi, v), (u', \varphi', v') : f \longrightarrow g$, pour tout $(\mu, \nu) : (u, \varphi, v) \Rightarrow (u', \varphi', v')$, pour tous remplissages (α, s, β) et (α', s', β') respectivement de (u, φ, v) et de (u', φ', v'), il existe un unique $\sigma : s \Rightarrow s'$ qui vérifie les équations 3.4 et 3.5.*

Preuve. 1. Soit $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$ dont (α, s, β) est un remplissage universel. Soit (α', s', β') un autre remplissage de (u, φ, v). Montrons qu'il est universel. Choisissons un troisième remplissage (γ, t, δ) de (u, φ, v). Comme (α, s, β) est universel, il existe un unique $\mu : s' \Rightarrow s$ inversible tel que (a) $\alpha(\mu * f) = \alpha'$ et (b) $\beta(g * \mu) = \beta'$; de même, il existe un unique $\nu : t \Rightarrow s$ inversible tel que (c) $\alpha(\nu * f) = \gamma$ et (d) $\beta(g * \nu) = \delta$. Posons $\pi = \mu^{-1} \circ \nu : t \Rightarrow s'$. Voyons que π vérifie les conditions requises. D'une part, en utilisant successivement (a) et (c), nous obtenons $\alpha'(\pi * f) = \alpha'(\mu^{-1} * f)(\nu * f) = \alpha(\nu * f) = \gamma$; et d'autre part, en utilisant (b) puis (d), nous obtenons $\beta'(g * \pi) = \beta'(g * \mu^{-1})(g * \nu) = \beta(g * \nu) = \delta$, ce qui prouve que (α', s', β') est universel.

2. Voyons que si $f \downarrow g$, alors f et g vérifient les conditions (a) et (b). La condition (a) est immédiate à partir de la condition 1. de la définition 3.3. Quant à la condition (b), par le premier point de cette proposition, tous les remplissages de (u, φ, v) et (u', φ', v') sont universels, car il en existe des universels par la condition 1. de la définition 3.3, et donc nous pouvons appliquer le point 2. de la cette définition.

   Il reste à prouver que si f et g vérifient les conditions (a) et (b), $f \downarrow g$. Le point 2. de la définition est obtenu immédiatement par la propriété (b), car celle-ci s'applique à tous les remplissages et donc a fortiori aux remplissages universels.

   Pour le point 1. de la définition, soit (α, s, β) un remplissage de (u, φ, v) obtenu par (a). Voyons qu'il est universel. Soit (γ, t, δ) un autre remplissage de (u, φ, v). Considérons la 2-flèche $(1_u, 1_v) : (u, \varphi, v) \Rightarrow (u, \varphi, v)$ dans $\mathbf{C}^2$. La propriété (b) nous donne une unique 2-flèche $\omega : t \Rightarrow s$ telle que $\alpha(\omega * f) = \gamma$ et $\beta(g * \omega) = \delta$, ainsi qu'une unique 2-flèche $\omega' : s \Rightarrow t$ telle que $\gamma(\omega' * f) = \alpha$ et $\delta(g * \omega') = \beta$. Il est facile de voir que ω et ω' sont inverses l'un de l'autre en utilisant l'unicité d'une 2-flèche $\tau : s \Rightarrow s$ et d'une 2-flèche $\tau' : t \Rightarrow t$ obtenues par (b). Les propriétés que vérifie ω sont bien celles attendues et donc (α, s, β) est universel. □

La démonstration de l'analogue 2-catégoriel de la proposition 2.2 que voici se trouve en grande partie dans [Mil].

Proposition 3.5. *Soit $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ deux morphismes d'une 2-catégorie* $\mathbf{C}$*. $f \downarrow g$ si et seulement si le diagramme suivant (dans* **Cat***) est un* *pseudo-bi-produit fibré.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(B,C) \arrow[r, "\mathbf{C}(B,g)"] \arrow[d, "\mathbf{C}(f,C)"'] & \mathbf{C}(B,D) \arrow[d, "\mathbf{C}(f,D)"] \\ \mathbf{C}(A,C) \arrow[r, "\mathbf{C}(A,g)"'] & \mathbf{C}(A,D) \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Preuve. 1. Prouvons d'abord la condition nécessaire. Supposons $f \downarrow g$ et prouvons que 3.6 est un pseudo-bi-produit fibré (définition 1.6). Considérons la situation suivante.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\varphi"] & \mathbf{C}(B,D) \arrow[d, "\mathbf{C}(f,D)"] \\ \mathbf{C}(A,C) \arrow[r, "\mathbf{C}(A,g)"'] & \mathbf{C}(A,D) \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

Nous devons construire un foncteur $H : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}(B,C)$ et deux transformations naturelles inversibles $\alpha : \mathbf{C}(f,C) \circ H \Rightarrow F$ et $\beta : \mathbf{C}(B,g) \circ H \Rightarrow G$. Si $X \in \mathbf{D}$, (FX, φ_X, GX) est une 1-flèche dans $\mathbf{C}^2(f,g)$, et comme $f \downarrow g$, il en existe un remplissage universel :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "FX"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\alpha_X \Leftarrow"] & B \arrow[d, "GX"] \arrow[dl, "HX"'] \\ C \arrow[r, "g"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Rightarrow \beta_X"] & D, \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

ce qui fournit $HX \in \mathbf{C}(B,C)$ et les transformations naturelles α et β. Si $x : X \longrightarrow Y$ dans $\mathbf{D}$, considérons $Fx : FX \Rightarrow FY$ et $Gx : GX \Rightarrow GY$, qui forment, par naturalité de φ, une 2-flèche $(Fx, Gx) : (FX, \varphi_X, GX) \Rightarrow (FY, \varphi_Y, GY)$ dans $\mathbf{C}^2$. Dès lors, comme $f \downarrow g$, par la propriété 2. de la définition 3.3, il existe un unique $Hx : HX \Rightarrow HY$ tel que

$$\begin{aligned} Fx \circ \alpha_X &= \alpha_Y \circ (Hx * f) \\ Gx \circ \beta_X &= \beta_Y \circ (g * Hx). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Il est facile de voir que H est un foncteur, en utilisant l'unicité de $H1_X$ et de $H(yx)$. α et β sont des transformations naturelles par les équations 3.9, et vérifient $\varphi \circ (\mathbf{C}(f,D) * \beta) = \mathbf{C}(A,g) * \alpha$ car pour tout $X \in \mathbf{D}$, (α_X, HX, β_X) est un remplissage de (FX, φ_X, GX).

Si H', α' et β' rivalisent avec H, α et β, nous obtenons en utilisant l'universalité des (α_X, HX, β_X), une unique transformation naturelle inversible $\omega : H' \Rightarrow H$ vérifiant les conditions requises.

2. Prouvons maintenant la condition suffisante et pour cela, d'abord, la condition 1. de la définition 3.3.

   Soit $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$ dans $\mathbf{C}^2$. Si $\mathbf{1}$ est la catégorie terminale, définissons $u : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}(A, C)$ et $v : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}(B, D)$ par $u(*) = u$ et $v(*) = v$. De même, définissons $\varphi : \mathbf{C}(f, D) \circ v \Rightarrow \mathbf{C}(A, g) \circ u$ par $\varphi_* = \varphi$. Comme le diagramme 3.6 est un pseudo-bi-produit fibré, il existe un foncteur $s : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}(B, C)$, et des transformations naturelles inversibles $\alpha : \mathbf{C}(f, C) \circ s \Rightarrow u$ et $\beta : \mathbf{C}(B, g) \circ s \Rightarrow v$ tels que $\mathbf{C}(A, g) * \alpha = \varphi \circ (\mathbf{C}(f, D) * \beta)$, ces données étant universelles. Cela revient exactement à la donnée d'un remplissage universel de (u, φ, v).

   Il reste à démontrer la condition 2. de la définition 3.3. Dès lors, soit $(\mu, \nu) : (u_0, \varphi_0, v_0) \Rightarrow (u_1, \varphi_1, v_1) : f \longrightarrow g$ dans $\mathbf{C}^2$. Soit (α_0, s_0, β_0) et (α_1, s_1, β_1) des remplissages universels de respectivement (u_0, φ_0, v_0) et (u_1, φ_1, v_1). Nous sommes alors dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \arrow[r, "(\nu : v_0 \Rightarrow v_1)"] \arrow[d, "(\mu : u_0 \Rightarrow u_1)"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow (\varphi_0, \varphi_1)"] & \mathbf{C}(B, D) \arrow[d, "\mathbf{C}(f, D)"] \\
\mathbf{C}(A, C) \arrow[r, "\mathbf{C}(A, g)"'] & \mathbf{C}(A, D),
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

   où un foncteur F de $\mathbf{2} = \{\, 0 \xrightarrow{\varpi} 1 \,\}$ vers une catégorie $\mathbf{D}$ est noté $(F(\varpi) : F(0) \longrightarrow F(1))$. Comme le diagramme 3.6 est un pseudo-bi-produit fibré, il existe un foncteur $(\xi : h_0 \Rightarrow h_1) : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{C}(B, C)$ et des transformations naturelles inversibles $(\gamma_0, \gamma_1) : \mathbf{C}(f, C) \circ (\xi : h_0 \Rightarrow h_1) \Rightarrow (\mu : u_0 \Rightarrow u_1)$ et $(\delta_0, \delta_1) : \mathbf{C}(B, g) \circ (\xi : h_0 \Rightarrow h_1) \Rightarrow (\nu : v_0 \Rightarrow v_1)$ tels que $\mathbf{C}(A, g) * (\gamma_0, \gamma_1) = (\varphi_0, \varphi_1) \circ (\mathbf{C}(f, D) * (\delta_0, \delta_1))$ et universels. Dès lors $(\gamma_0, h_0, \delta_0)$ et $(\gamma_1, h_1, \delta_1)$ sont des remplissages de respectivement (u_0, φ_0, v_0) et (u_1, φ_1, v_1), ce qui donne deux 2-flèches inversibles $\lambda_0 : h_0 \Rightarrow t_0$ et $\lambda_1 : h_1 \Rightarrow t_1$. Posons alors $\pi = \lambda_1 \circ \xi \circ \lambda_0^{-1} : t_0 \Rightarrow t_1$. Il est facile de voir que π convient. □

Définition 3.6. Si $\mathcal{H}$ est une classe de flèches d'une 2-catégorie $\mathbf{C}$, notons $\mathcal{H}^{\uparrow} = \{e \,|\, e \downarrow h \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}$ et $\mathcal{H}^{\downarrow} = \{m \,|\, h \downarrow m \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}$.

3.2 Définition et propriétés des pseudo-systèmes de factorisation

Venons-en à la définition de système de factorisation dans une 2-catégorie, qui mime celle dans les catégories (définition 2.3).

Définition 3.7. Un *pseudo-système de factorisation* dans une 2-catégorie $\mathbf{C}$ est une paire $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de classes de flèches de $\mathbf{C}$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. si $m \in \mathcal{M}$ et i est une équivalence alors $mi \in \mathcal{M}$, et si $e \in \mathcal{E}$ et i est une équivalence alors $ie \in \mathcal{E}$;

2. $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ sont stables sous 2-flèches inversibles (c'est-à-dire si $\alpha : f \Rightarrow e$ est inversible, où $e \in \mathcal{E}$ alors $f \in \mathcal{E}$; et si $\beta : f \Rightarrow m$ est inversible, où $m \in \mathcal{M}$ alors $f \in \mathcal{M}$) ;
3. pour toute flèche f dans $\mathbf{C}$, il existe $e \in \mathcal{E}$, $m \in \mathcal{M}$ et $\varphi : me \Rightarrow f$ inversible ;
4. si $e \in \mathcal{E}$ et $m \in \mathcal{M}$ alors $e \downarrow m$.

La démonstration des propriétés de base analogues à celles de la proposition 2.4 se trouve dans [K-V] et [Mil].

Proposition 3.8. *Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ un système de factorisation dans une 2-catégorie $\mathbf{C}$.*

1. $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \{$*équivalences*$\}$.
2. $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{M}$ *sont fermés sous composition.*
3. $\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\uparrow}$ *et* $\mathcal{M} = \mathcal{E}^{\downarrow}$.
4. *La $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorisation d'une flèche de $\mathbf{C}$ est essentiellement unique.*
5. *Si m' et $m \in \mathcal{M}$ et si $\theta : m'g \Rightarrow m$ est une 2-flèche inversible, alors $g \in \mathcal{M}$; par dualité, si e' et $e \in \mathcal{E}$ et si $\theta : fe' \Rightarrow e$ est une 2-flèche inversible, alors $f \in \mathcal{E}$.*
6. $\mathcal{M}$ *est stable sous pseudo-bilimites.*

Les pseudo-bilimites sont définies en général de manière analogue aux pseudo-bi-produits fibrés (définition 1.6).

3.3 Fonctorialité des pseudo-systèmes de factorisation

De manière analogue au théorème 2.9, nous pouvons construire un pseudo-système de factorisation à partir d'un pseudo-foncteur et d'une transformation pseudo-naturelle. Le travail est fait dans [Mil], à part la vérification de la deuxième partie de la propriété d'orthogonalité.

Définition 3.9. Le 2-foncteur $E_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^2$ est défini, si $C \in \mathbf{C}$, par $E_{\mathbf{C}}(C) = 1_C$; si $f \in \mathbf{C}(C, C')$, par $E_{\mathbf{C}}(f) = (f, 1_f, f)$; et si $\alpha : f \Rightarrow g : C \longrightarrow C'$, par $E_{\mathbf{C}}(\alpha) = (\alpha, \alpha)$.

Dans $\mathbf{C}^2$, une flèche $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$ se factorise en $(u, 1_{gu}, 1_{D'}) \circ (1_C, \varphi, v)$ (voir le diagramme suivant).

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\nearrow\varphi"] & C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "gu"] & D \arrow[d, "g"] \\
C' \arrow[r, "v"'] & D' \arrow[r, "1_{D'}"'] & D'
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

Soit un pseudo-foncteur $K : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ et une équivalence pseudo-naturelle (c'est-à-dire une équivalence dans la 2-catégorie des pseudo-foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$) $\gamma : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow KE_{\mathbf{C}}$. Pour factoriser une flèche $f : C \longrightarrow C'$, factorisons $E_{\mathbf{C}}(f) = (f, 1_f, f)$ dans $\mathbf{C}^2$, puis appliquons K. Cela donne une 2-flèche $\varphi_f : f \Rightarrow m_f e_f$ inversible, où $m_f = \gamma'_{C'} \circ K(f, 1_f, 1_{C'})$ (γ' est le pseudo-inverse de γ), $e_f = K(1_C, 1_f, f) \circ \gamma_C$ et φ_f est la 2-flèche suivante.

$$\begin{tikzcd}
 & & Kf \arrow[dr, "{K(f,1_f,1_{C'})}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\kappa"] & & \\
 & K1_C \arrow[ur, "{K(1_C,1_f,f)}"] \arrow[rr, "{K(f,1_f,f)}"] \arrow[dr, "\gamma'_C"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon_C"] & {} & K1_{C'} \arrow[dr, "\gamma'_{C'}"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\gamma'_f"] & \\
C \arrow[ur, "\gamma_C"] \arrow[rr, "1_C"'] & {} & C \arrow[rr, "f"'] & & C'
\end{tikzcd} \tag{3.12}$$

Posons $\mathcal{E}_K = \{f \mid m_f \text{ est une équivalence}\}$ et $\mathcal{M}_K = \{f \mid e_f \text{ est une équivalence}\}$. Le résultat de [Mil] est alors le suivant.

Théorème 3.10. *Si, pour toute 1-flèche f de $\mathbf{C}$, $e_f \in \mathcal{E}_K$ et $m_f \in \mathcal{M}_K$, $(\mathcal{E}_K, \mathcal{M}_K)$ est un pseudo-système de factorisation sur $\mathbf{C}$.*

Chapitre 4

2-Catégories avec système de factorisation libres

4.1 Construction

Mettons au point la version 2-catégorielle des constructions du début de la section 2.2.

Considérons la 3-catégorie 2-$\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ des 2-catégories avec pseudo-système de factorisation, des pseudo-foncteurs qui préservent les systèmes de factorisation ($F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$ et $F(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$), des transformations pseudo-naturelles et des modifications. Nous allons construire l' "adjoint à gauche" $(.)^2$ du 3-foncteur d'oubli U : 2-$\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}} \longrightarrow$ 2-$\mathbf{Cat}$.

Si $\mathbf{C}$ est une 2-catégorie, $\mathbf{C}^2$ a déjà été introduit dans la définition 3.1. Pour bien définir le pseudo-système de factorisation sur $\mathbf{C}^2$, nous allons utiliser la proposition 3.10. Définissons donc un pseudo-foncteur (un 2-foncteur même) $K : (\mathbf{C}^2)^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$.

1. Si $(a_1, \alpha, a_2) : f \longrightarrow g$ est un objet de $(\mathbf{C}^2)^2$, on pose $K(a_1, \alpha, a_2) = ga_1$.
2. Si $((m_1, \mu, m_2), (\varphi_1, \varphi_2), (n_1, \nu, n_2)) : (a_1, \alpha, a_2) \longrightarrow (b_1, \beta, b_2)$ est une 1-flèche dans $(\mathbf{C}^2)^2$, où $(a_1, \alpha, a_2) : f \longrightarrow g$ et $(b_1, \beta, b_2) : h \longrightarrow k$ dans $\mathbf{C}^2$, posons $K((m_1, \mu, m_2), (\varphi_1, \varphi_2), (n_1, \nu, n_2)) =$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "a_1"'] \arrow[dr, phantom, "\varphi_1 \nearrow"] & E \arrow[d, "b_1"] \\
D \arrow[r, "n_1"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\nu \nearrow"] & F \arrow[d, "k"] \\
D' \arrow[r, "n_2"'] & F'.
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

3. Si $((\sigma_1, \sigma_2), (\tau_1, \tau_2))$ est une 2-flèche de $(\mathbf{C}^2)^2$, posons $K((\sigma_1, \sigma_2), (\tau_1, \tau_2)) = (\sigma_1, \tau_2)$.

Alors il est facile de vérifier que K est bien défini, que K est un 2-foncteur et que $KE_{\mathbf{C}^2} = 1_{\mathbf{C}^2}$. Les 1-flèches de $\mathbf{C}^2$ sont factorisées comme indiqué dans le diagramme 3.11. Dès lors, si nous posons

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathbf{C}} &= \{(u,\varphi,v) \mid m_{(u,\varphi,v)} = (u, 1_{gu}, 1_{D'}) \text{ est une équivalence}\}\\ &= \{(u,\varphi,v) \mid u \text{ est une équivalence}\}\end{aligned} \tag{4.2}$$

(la deuxième égalité est due au fait que dans $\mathbf{C}^2$, (w,ψ,x) est une équivalence si et seulement si w et x sont des équivalences dans $\mathbf{C}$) et

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathbf{C}} &= \{(u,\varphi,v) \mid e_{(u,\varphi,v)} = (1_C, \varphi, v) \text{ est une équivalence}\}\\ &= \{(u,\varphi,v) \mid v \text{ est une équivalence}\},\end{aligned} \tag{4.3}$$

par la proposition 3.10, $(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}, \mathcal{M}_{\mathbf{C}})$ est un pseudo-système de factorisation.

Si $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est un pseudo-foncteur, voici comment $F^2 : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{D}^2$ est défini.

1. Si $f : C \longrightarrow C'$ est un objet de $\mathbf{C}^2$, posons $F^2(f) = Ff : FC \longrightarrow FC'$.
2. Si $(u,\varphi,v) : f \longrightarrow g$ est une 1-flèche de $\mathbf{C}^2$, posons $F^2(u,\varphi,v) = (Fu, \varphi^F, Fv)$, où φ^F est la 2-flèche suivante.

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "Fu"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, bend left=20, "F(gu)"] \arrow[dr, bend right=20, "F(vf)"'] & FD \arrow[d, "Fg"] \arrow[dl, phantom, "\kappa^{-1}\ \Nearrow\quad F\varphi\ \Nearrow\quad \kappa\ \Nearrow"] \\
FC' \arrow[r, "Fv"'] & FD'
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

3. Si $(\alpha,\beta) : (u,\varphi,v) \longrightarrow (u',\varphi',v')$ est une 2-flèche de $\mathbf{C}^2$, posons $F^2(\alpha,\beta) = (F\alpha, F\beta)$.
4. Si $f : C \longrightarrow C'$ est un objet de $\mathbf{C}^2$, posons
$$\iota^2_f = (\iota_C, \iota_{C'}) : 1_{F^2 f} = (1_{FC}, 1_{Ff}, 1_{FC'}) \Rightarrow (F1_C, (1_f)^F, F1_{C'}) = F^2(1_f).$$
5. Si $(u,\varphi,v) : f \longrightarrow g$ et $(w,\psi,x) : g \longrightarrow h$ sont deux 1-flèches dans $\mathbf{C}^2$, posons
$$\kappa^2_{(u,\varphi,v),(w,\psi,x)} = (\kappa_{uw}, \kappa_{vx}).$$

Alors F^2 est bien défini, est un pseudo-foncteur, $F^2(\mathcal{E}_{\mathbf{C}}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathbf{D}}$ et $F^2(\mathcal{M}_{\mathbf{C}}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{D}}$ (car les pseudo-foncteurs préservent les équivalences).

Si $\mu : F \Rightarrow G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est une transformation pseudo-naturelle, voici comment $\mu^2 : F^2 \Rightarrow G^2$ est construit.

1. Si $f : C \longrightarrow C'$ est un objet de $\mathbf{C}^2$, posons $\mu^2_f = (\mu_C, \mu_f, \mu_{C'}) : Ff \longrightarrow Gf$ (voir le diagramme suivant).

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\mu_f\ \Nearrow"] & GC \arrow[d, "Gf"] \\
FC' \arrow[r, "\mu_{C'}"'] & GC'
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

2. Si $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$ dans $\mathbf{C}^2$, posons $\mu^2_{(u,\varphi,v)} = (\mu_u, \mu_v)$.

Alors μ^2 est bien définie et pseudo-naturelle.

Si $\Gamma : \mu \Rrightarrow \nu$ est une modification, nous définissons une modification $\Gamma^2 : \mu^2 \Rrightarrow \nu^2$ en posant, si $f : C \longrightarrow C'$ est un objet de $\mathbf{C}^2$, $\Gamma_f = (\Gamma_C, \Gamma_{C'}) : \mu^2_f = (\mu_C, \mu_f, \mu_{C'}) \Rightarrow (\nu_C, \nu_f, \nu_{C'}) = \nu^2_f$.

Tout cela mis ensemble donne un 3-foncteur $(.)^2 : 2\text{-}\mathbf{Cat} \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$.

Maintenant, définissons une transformation faiblement 3-naturelle (voir la définition 1.13) $E : 1_{2\text{-}\mathbf{Cat}} \Rightarrow U \circ (.)^2$, qui sera l'unité de l'adjonction $(.)^2 \dashv U$. Si $\mathbf{C}$ est une 2-catégorie, $E_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^2$ est le 2-foncteur introduit par la définition 3.9. Si $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est un pseudo-foncteur, la transformation 2-naturelle $E_F : E_{\mathbf{D}} \circ F \Rightarrow F^2 \circ E_{\mathbf{C}}$ est définie par $(E_F)_C = (1_{FC}, \iota^F_C, 1_{FC}) : 1_{FC} \longrightarrow F1_C$.

4.2 Propriété universelle

Théorème 4.1. *$(.)^2$ est 3-adjoint à gauche de U.*

Preuve. Il faut voir que pour toute 2-catégorie $\mathbf{C}$, pour tout $(\mathbf{D}, (\mathcal{E}, \mathcal{M})) \in 2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$, le 2-foncteur $- \circ E_{\mathbf{C}} : 2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}(\mathbf{C}^2, (\mathbf{D}, (\mathcal{E}, \mathcal{M}))) \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ est une biéquivalence. Je ne donne que la partie constructive de la démonstration.

1. Il faut d'abord montrer que si $F, G : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{D}$ sont des pseudo-foncteurs préservant le système de factorisation, le foncteur $(- \circ E_{\mathbf{C}})_{F,G}$ est une équivalence.

   (a) Montrons d'abord que ce foncteur est plein et fidèle. Il faut voir que si $\alpha, \beta : F \Rightarrow G$ sont deux transformations pseudo-naturelles, l'application qui envoie une modification $\Lambda : \alpha \Rrightarrow \beta$ sur la modification $\Lambda \diamond E_{\mathbf{C}} : \alpha * E_{\mathbf{C}} \Rrightarrow \beta * E_{\mathbf{C}}$ est une bijection. Construisons son inverse. Soit $\Theta : \alpha * E_{\mathbf{C}} \Rrightarrow \beta * E_{\mathbf{C}}$ une modification. Il faut construire une modification $\Lambda : \alpha \Rrightarrow \beta$ telle que $\Lambda \diamond E_{\mathbf{C}} = \Theta$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "E_{\mathbf{C}}"] & \mathbf{C}^2 \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha,\beta"] & \mathbf{D} \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

   Si $f : C \longrightarrow C'$ est un objet de $\mathbf{C}^2$, factorisons $E_{\mathbf{C}}(f) = (f, 1_f, f)$ dans $\mathbf{C}^2$: $(f, 1_f, f) = (f, 1_f, 1_{C'}) \circ (1_C, 1_f, f)$, où $(f, 1_f, 1_{C'}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{C}}$ et $(1_C, 1_f, f) \in \mathcal{E}_{\mathbf{C}}$. Alors

$$\begin{tikzcd} F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_f,f)"] \arrow[d, "\alpha_{1_C}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \alpha_{(1_C,1_f,f)}"] & Ff \arrow[r, "F(f,1_f,1_{C'})"] \arrow[d, "\alpha_f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \alpha_{(f,1_f,1_{C'})}"] & F1_{C'} \arrow[d, "\alpha_{1_{C'}}"] \\ G1_C \arrow[r, "G(1_C,1_f,f)"'] & Gf \arrow[r, "G(f,1_f,1_{C'})"'] & G1_{C'} \end{tikzcd} \tag{4.7}$$

et

$$\begin{tikzcd}
F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_f,f)"] \arrow[d, "\beta_{1_C}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_{(1_C,1_f,f)}"] & Ff \arrow[r, "F(f,1_f,1_{C'})"] \arrow[d, "\beta_f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_{(f,1_f,1_{C'})}"] & F1_{C'} \arrow[d, "\beta_{1_{C'}}"] \\
G1_C \arrow[r, "G(1_C,1_f,f)"'] & Gf \arrow[r, "G(f,1_f,1_{C'})"'] & G1_{C'}
\end{tikzcd} \tag{4.8}$$

sont deux remplissages respectivement de

$$\begin{tikzcd}
F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_f,f)"] \arrow[d, "\alpha_{1_C}"'] \arrow[dr, "F(f,1_f,f)" description] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\kappa^F"] & Ff \arrow[d, "F(f,1_f,1_{C'})"] \\
G1_C \arrow[d, "G(1_C,1_f,f)"'] \arrow[dr, "G(f,1_f,f)" description] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_{(f,1_f,f)}"] & F1_{C'} \arrow[d, "\alpha_{1_{C'}}"] \\
Gf \arrow[r, "G(f,1_f,1_{C'})"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\kappa^G"] & G1_{C'}
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

et de

$$\begin{tikzcd}
F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_f,f)"] \arrow[d, "\beta_{1_C}"'] \arrow[dr, "F(f,1_f,f)" description] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\kappa^F"] & Ff \arrow[d, "F(f,1_f,1_{C'})"] \\
G1_C \arrow[d, "G(1_C,1_f,f)"'] \arrow[dr, "G(f,1_f,f)" description] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta_{(f,1_f,f)}"] & F1_{C'} \arrow[d, "\beta_{1_{C'}}"] \\
Gf \arrow[r, "G(f,1_f,1_{C'})"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\kappa^G"] & G1_{C'},
\end{tikzcd} \tag{4.10}$$

par l'axiome 3. de la définition 1.4 de transformation pseudo-naturelle. Remarquons que

$$G(1_C, 1_f, f) * \Theta_C : G(1_C, 1_f, f) \circ \alpha_{1_C} \Rightarrow G(1_C, 1_f, f) \circ \beta_{1_C}$$

et

$$\Theta_{C'} * F(f, 1_f, 1_{C'}) : \alpha_{1_{C'}} \circ F(f, 1_f, 1_{C'}) \Rightarrow \beta_{1_{C'}} \circ F(f, 1_f, 1_{C'})$$

forment une 2-flèche dans $\mathbf{C}^2$ de 4.9 vers 4.10, où 4.9 et 4.10 sont considérés comme des 1-flèches de $\mathbf{C}^2$ de $F(1_C, 1_f, f)$ vers $G(f, 1_f, 1_{C'})$. Comme $F(1_C, 1_f, f) \in F(\mathcal{E}_\mathbf{C}) \subseteq \mathcal{E}$ et $G(f, 1_f, 1_{C'}) \in G(\mathcal{M}_\mathbf{C}) \subseteq \mathcal{M}$, $F(1_C, 1_f, f) \downarrow$

$G(f, 1_f, 1_{C'})$ et, par la propriété 2. de la définition 3.4, il existe une unique 2-flèche $\Lambda_f : \alpha_f \Rightarrow \beta_f$ telle que

$$\begin{tikzcd}
F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_f,f)"] \arrow[d, bend right=50, "\beta_{1_C}"'] \arrow[d, bend left=50, "\alpha_{1_C}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\Theta_C}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha_{(1_C,1_f,f)}}"] & Ff \arrow[d, "\alpha_f"] \\
G1_C \arrow[r, "G(1_C,1_f,f)"'] & Gf
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_f,f)"] \arrow[d, "\beta_{1_C}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\beta_{(f,1_f,1_{C'})}}"] & Ff \arrow[d, bend right=50, "\beta_f"'] \arrow[d, bend left=50, "\alpha_f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\Lambda_f}"] \\
G1_C \arrow[r, "G(1_C,1_f,f)"'] & Gf
\end{tikzcd}
\tag{4.11}$$

et

$$\begin{tikzcd}
Ff \arrow[r, "F(f,1_f,1_{C'})"] \arrow[d, "\beta_f"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\beta_{(1_C,1_f,f)}}"] & F1_{C'} \arrow[d, bend right=50, "\beta_{1'_C}"'] \arrow[d, bend left=50, "\alpha_{1'_C}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\Theta_{C'}}"] \\
Gf \arrow[r, "G(f,1_f,1_{C'})"'] & G1_{C'}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Ff \arrow[r, "F(f,1_f,1_{C'})"] \arrow[d, bend right=50, "\beta_f"'] \arrow[d, bend left=50, "\alpha_f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\Lambda_f}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha_{(f,1_f,1_{C'})}}"] & F1_{C'} \arrow[d, "\alpha_{1_{C'}}"] \\
Gf \arrow[r, "G(f,1_f,1_{C'})"'] & G1_{C'}.
\end{tikzcd}
\tag{4.12}$$

$\Lambda \diamond E_{\mathbf{C}} = \Theta$ car si $C \in \mathbf{C}$, Θ_C vérifie les propriétés 4.11 et 4.12 pour $f = 1_C$, propriétés que seul Λ_{1_C} vérifie ; dès lors $\Lambda_{1_C} = \Theta_C$.

De plus, si $\Lambda : \alpha \Rrightarrow \beta$ est une modification, construisons comme je viens de décrire $\Lambda' : \alpha \Rrightarrow \beta$ tel que $\Lambda' \diamond E_{\mathbf{C}} = \Lambda \diamond E_{\mathbf{C}}$; alors $\Lambda' = \Lambda$ car pour tout $f \in \mathbf{C}^2$, Λ_f vérifie les propriétés 4.11 et 4.12 que seul Λ'_f vérifie.

(b) Montrons maintenant que $(- \circ E_{\mathbf{C}})_{FG}$ est essentiellement surjectif. Soit une transformation pseudo-naturelle $\gamma : FE_{\mathbf{C}} \Rightarrow GE_{\mathbf{C}}$; nous cherchons une transformation pseudo-naturelle $\alpha : F \Rightarrow G$ munie d'une modification inversible $\Upsilon : \gamma \Rrightarrow \alpha * E_{\mathbf{C}}$.

Soit $f : C \longrightarrow C'$ objet de $\mathbf{C}^2$. Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_f,f)"] \arrow[d, "\gamma_C"'] \arrow[dr, "F(f,1_f,f)" description] \arrow[r, phantom, shift right=12, "\Downarrow\kappa^F"] & Ff \arrow[d, "F(f,1_f,1_{C'})"] \\
G1_C \arrow[d, "G(1_C,1_f,f)"'] \arrow[dr, "G(f,1_f,f)" description] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma_f"] & F1_{C'} \arrow[d, "\gamma_{C'}"] \\
Gf \arrow[r, "G(f,1_f,1_{C'})"'] \arrow[r, phantom, shift left=12, "\Downarrow\kappa^G"] & G1_{C'}
\end{tikzcd}
\tag{4.13}$$

Comme $F(1_C, 1_f, f) \downarrow G(f, 1_f, 1_{C'})$, il existe un remplissage universel du diagramme 4.13

$$\begin{tikzcd}
F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_f,f)"] \arrow[d, "\gamma_C"'] \arrow[dr, phantom, "\mu_f \Leftarrow"] & Ff \arrow[d, "F(f,1_f,1_{C'})"] \arrow[dd, dashed, "\alpha_f"'] \\
G1_C \arrow[d, "G(1_C,1_f,f)"'] & F1_{C'} \arrow[d, "\gamma_{C'}"] \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow \nu_f"] \\
Gf \arrow[r, "G(f,1_f,1_{C'})"'] & G1_{C'},
\end{tikzcd} \tag{4.14}$$

qui nous fournit α_f.
Maintenant, si $(u, \varphi, v) \in \mathbf{C}^2(f, g)$, considérons le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & & F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_f,f)"] \arrow[dll, "\gamma_C"'] \arrow[ddrrr, bend left, "F(gu,\varphi,vf)"] \arrow[ddrrr, bend right, "F(gu,1_{gu},gu)"] & Ff \arrow[drr, "F(u,\varphi,v)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\kappa^F"] & & \\
G1_C \arrow[d, "G(1_C,1_f,f)"'] \arrow[ddrrr, bend left, "G(gu,1_{gu},gu)"] \arrow[ddrrr, bend right, "G(gu,\varphi,vf)"'] & & & \Downarrow F(1,\varphi) & & Fg \arrow[d, "F(g,1_g,1_{D'})"] \\
Gf \arrow[drr, "G(u,\varphi,v)"'] & \Downarrow\kappa^G & \Downarrow G(1,\varphi)^{-1} & \Downarrow\gamma_{gu} & & F1_{D'} \arrow[dll, "\gamma_{D'}"] \\
 & & Gg \arrow[r, "G(g,1_g,1_{D'})"'] & G1_{D'} & &
\end{tikzcd} \tag{4.15}$$

dont deux remplissages (les diagonales sont les flèches en traits discontinus) sont

$$
\begin{tikzcd}
 & F1_C \arrow[r, "F(1_C{,}1_f{,}f)"] \arrow[dl, "\gamma_C"'] & Ff \arrow[d, "F(f{,}1_f{,}1_{C'})"] \arrow[dr, "F(u{,}\varphi{,}v)"] \arrow[ddll, dashed, "\alpha_f"] & \\
G1_C \arrow[d, "G(1_C{,}1_f{,}f)"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow \mu_f"] & & F1_{C'} \arrow[dl, "\gamma_{C'}"'] \arrow[dr, "F(v{,}1_v{,}v)"'] \arrow[r, phantom, "\zeta' \Nearrow"] \arrow[dll, phantom, "\Downarrow \nu_f"] & Fg \arrow[d, "F(g{,}1_g{,}1_{D'})"] \\
Gf \arrow[r, "G(f{,}1_f{,}1_{C'})"] \arrow[dr, dashed, "G(u{,}\varphi{,}v)"'] & G1_{C'} \arrow[dr, "G(v{,}1_v{,}v)"] \arrow[rr, phantom, "\Searrow (\gamma_v)^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\zeta \Uparrow"] & & F1_{D'} \arrow[dl, "\gamma_{D'}"] \\
 & Gg \arrow[r, "G(g{,}1_g{,}1_{D'})"'] & G1_{D'} &
\end{tikzcd}
\tag{4.16}
$$

où $\zeta = (\kappa^G)^{-1} \circ G(\varphi^{-1}, 1_v) \circ \kappa^G$ et $\zeta' = (\kappa^F)^{-1} \circ F(\varphi, 1_v) \circ \kappa^F$, et

$$
\begin{tikzcd}
 & F1_C \arrow[r, "F(1_C{,}1_f{,}f)"] \arrow[dl, "\gamma_C"'] \arrow[dr, "F(u{,}1_u{,}u)"] & Ff \arrow[dr, dashed, "F(u{,}\varphi{,}v)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta'"] & \\
G1_C \arrow[d, "G(1_C{,}1_f{,}f)"'] \arrow[dr, "G(u{,}1_u{,}u)"] \arrow[rr, phantom, "\Nwarrow \gamma_u"] & & F1_D \arrow[r, "F(1_D{,}1_g{,}g)"'] \arrow[dl, "\gamma_D"] & Fg \arrow[d, "F(g{,}1_g{,}1_{D'})"] \arrow[ddll, dashed, "\alpha_g"'] \\
Gf \arrow[dr, "G(u{,}\varphi{,}v)"'] \arrow[r, phantom, "\Swarrow \eta"] & G1_D \arrow[d, "G(1_D{,}1_g{,}g)"] \arrow[r, phantom, "\mu_g \Nwarrow"] & & F1_{D'} \arrow[dl, "\gamma_{D'}"] \arrow[ul, phantom, "\Downarrow \nu_g"] \\
 & Gg \arrow[r, "G(g{,}1_g{,}1_{D'})"'] & G1_{D'} &
\end{tikzcd}
\tag{4.17}
$$

où $\eta = (\kappa^G)^{-1} \circ G(1_u, \varphi^{-1}) \circ \kappa^G$ et $\zeta' = (\kappa^F)^{-1} \circ F(1_u, \varphi) \circ \kappa^F$. Comme $F(1_C, 1_f, f) \downarrow G(g, 1_g, 1_{D'})$, il existe un remplissage universel du diagramme 4.15 et donc, par la première propriété de 3.4, tout remplissage du diagramme 4.15 est universel ; en particulier, 4.16 est universel et il existe une unique 2-flèche inversible $\alpha_{(u,\varphi,v)} : \alpha_g \circ F(u, \varphi, v) \Rightarrow G(u, \varphi, v) \circ \alpha_f$ vérifiant certaines propriétés. Il est possible de voir que le α ainsi défini est bien une transformation pseudo-naturelle.

Il reste à construire Υ. Pour cela, il suffit de constater que

$$\begin{tikzcd}
F1_C \arrow[r, "F(1_C,1_{1_C},1_C)"] \arrow[d, "\gamma_C"'] \arrow[dr, phantom, "\gamma_{1_C} \Leftarrow"] & F1_C \arrow[d, "F(1_C,1_{1_C},1_C)"] \arrow[ddl, "\gamma_C"'] \\
G1_C \arrow[d, "G(1_C,1_{1_C},1_C)"'] & F1_C \arrow[d, "\gamma_C"] \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow \gamma_{1_C}^{-1}"] \\
G1_C \arrow[r, "G(1_C,1_{1_C},1_C)"'] & G1_C
\end{tikzcd} \tag{4.18}$$

est un remplissage du diagramme 4.13 pour $f = 1_C$. Comme 4.14 (pour $f = 1_C$) en est un remplissage universel, il existe une unique 2-flèche inversible $\Upsilon_C : \gamma_C \Rightarrow \alpha_{1_C}$ qui vérifie certaines propriétés. Dans ce cas, il est facile de vérifier que Υ est bien une modification, et donc $(- \circ E_{\mathbf{C}})_{FG}$ est essentiellement surjectif.

Nous avons ainsi montré que $(- \circ E_{\mathbf{C}})_{FG}$ est une équivalence.

2. Il faut maintenant voir que si $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est un pseudo-foncteur, il existe $G : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{D}$ pseudo-foncteur qui préserve le système de factorisation, muni d'une équivalence pseudo-naturelle $\pi : GE_{\mathbf{C}} \Rightarrow F$.

   Au préalable, fixons une factorisation de toute flèche de $\mathbf{D}$: soit $h : X \longrightarrow X'$ dans $\mathbf{D}$; factorisons-le en $m_h \circ e_h$, à travers $M(h)$ (son image), où $m_h \in \mathcal{M}$ et $e_h \in \mathcal{E}$ (voir le diagramme suivant).

$$\begin{tikzcd}
& M(h) \arrow[dr, "m_h"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \zeta_h"] & \\
X \arrow[ur, "e_h"] \arrow[rr, "h"'] & {} & X'
\end{tikzcd} \tag{4.19}$$

   Construisons maintenant le pseudo-foncteur G.

   (a) Si $f \in \mathbf{C}^2$, posons $Gf = M(Ff)$.

   (b) Si $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$ dans $\mathbf{C}^2$, considérons le diagramme suivant, où φ^F est la 2-flèche 4.4.

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "e_{Ff}"] \arrow[d, "Fu"'] \arrow[dr, "Ff"'] & Gf \arrow[d, "m_{Ff}"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow \zeta_{Ff}"] \\
FD \arrow[r, phantom, "\Swarrow \varphi^F"] \arrow[d, "e_{Fg}"'] \arrow[dr, "Fg"] & FC' \arrow[d, "Fv"] \\
Gg \arrow[r, "m_{Fg}"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow \zeta_{Fg}^{-1}"] & FD'
\end{tikzcd} \tag{4.20}$$

Comme $e_{Ff} \downarrow m_{Fg}$, il existe un remplissage universel du diagramme 4.20 :

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "e_{Ff}"] \arrow[d, "Fu"'] \arrow[dr, phantom, "\mu_\varphi \Swarrow"] & Gf \arrow[r, "m_{Ff}"] \arrow[d, dashed, "G(u,\varphi,v)"] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \nu_\varphi"] & FC' \arrow[d, "Fv"] \\
FD \arrow[r, "e_{Fg}"'] & Gg \arrow[r, "m_{Fg}"'] & FD',
\end{tikzcd} \tag{4.21}$$

où μ_φ et ν_φ sont des abréviations pour $\mu_{(u,\varphi,v)}$ et $\nu_{(u,\varphi,v)}$.

(c) Si $(\alpha, \beta) : (u, \varphi, v) \Rightarrow (w, \psi, x)$ dans $\mathbf{C}^2$, $(e_{Fg} * F\alpha, F\beta * m_{Ff})$ est une 2-flèche de $\mathbf{C}^2$ de 4.20 vers le même diagramme où (u, φ, v) est remplacé par (w, ψ, x) et comme $e_{Ff} \downarrow m_{Fg}$, il existe une unique 2-flèche $G(\alpha, \beta)$: $G(u, \varphi, v) \Rightarrow G(w, \psi, x)$ qui vérifie certaines propriétés.

(d) Si $f : C \longrightarrow C'$ est un objet de $\mathbf{C}^2$,

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "e_{Ff}"] \arrow[d, bend right, "F1_C"'] \arrow[d, bend left, "1_{FC}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\iota^F_C}"] & Gf \arrow[r, "m_{Ff}"] \arrow[d, "1_{Gf}"] & FC' \arrow[d, bend right, "1_{FC'}"'] \arrow[d, bend left, "F1_{C'}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\iota^F_{C'}}{\Rightarrow}"] \\
FC \arrow[r, "e_{Ff}"'] & Gf \arrow[r, "m_{Ff}"'] & FC'
\end{tikzcd} \tag{4.22}$$

est un remplissage du diagramme 4.20 pour $(u, \varphi, v) = 1_f = (1_C, 1_f, 1_{C'})$; comme 4.21 (pour $(u, \varphi, v) = 1_f$) en est un remplissage universel, il existe une unique 2-flèche inversible $\iota^G_f : 1_{Gf} \Rightarrow G1_f$ vérifiant certaines propriétés.

(e) Si $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$ et $(w, \psi, x) : g \longrightarrow h$ sont deux 1-flèches dans $\mathbf{C}^2$, pour construire $\kappa^G_{(u,\varphi,v),(w,\psi,x)}$, il suffit de remarquer que

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "e_{Ff}"] \arrow[d, "Fu"] \arrow[dd, bend right=60, "F(wu)"'] \arrow[dr, phantom, "\mu_\varphi \Swarrow"] & Gf \arrow[r, "m_{Ff}"] \arrow[d, "G(u,\varphi,v)"] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \nu_\varphi"] & FC' \arrow[d, "Fv"'] \arrow[dd, bend left=60, "F(xv)"] \\
FD \arrow[r, "e_{Fg}"] \arrow[d, "Fw"] \arrow[l, phantom, "\underset{\kappa^F}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\mu_\psi \Swarrow"] & Gg \arrow[r, "m_{Fg}"] \arrow[d, "G(w,\psi,x)"] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \nu_\psi"] & FD' \arrow[d, "Fx"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\kappa^F}{\Rightarrow}"] & {} \\
FE \arrow[r, "e_{Fh}"'] & Gh \arrow[r, "m_{Fh}"'] & FE'
\end{tikzcd} \tag{4.23}$$

est un remplissage de 4.20, où (u, φ, v) est remplacé par $(w, \psi, x) \circ (u, \varphi, v)$, et dès lors, comme $G((w, \psi, x) \circ (u, \varphi, v))$ est la diagonale d'un remplissage universel de ce diagramme, il existe une unique 2-flèche inversible

$\kappa^G_{(u,\varphi,v),(w,\psi,x)} : G(w,\psi,x)\circ G(u,\varphi,v) \Rightarrow G((w,\psi,x)\circ(u,\varphi,v))$ qui vérifie certaines propriétés.

Nous avons ainsi construit un pseudo-foncteur $G : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{D}$. Il préserve le système de factorisation car, par exemple, si $(u,\varphi,v) \in \mathcal{E}_{\mathbf{C}}$ (c'est-à-dire si u est une équivalence dans $\mathbf{C}$ (équation 4.2)), il existe une 2-flèche μ_φ : $G(u,\varphi,v)\circ e_{Ff} \Rightarrow e_{Fg}\circ Fu$ inversible, où e_{Ff} et $e_{Fg}\circ Fu \in \mathcal{E}$, le second car Fu est une équivalence (F pseudo-foncteur), donc un élément de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est stable sous composition. Dès lors, par la propriété 5. de la proposition 3.8, $G(u,\varphi,v) \in \mathcal{E}$.

Il reste à construire π. Si $C \in \mathbf{C}$, posons $\pi_C = m_{F1_C} : G1_C \longrightarrow FC$ et si $f : C \longrightarrow C'$ dans $\mathbf{C}$, posons $\pi_f = \nu_{(f,1_f,f)}$. Son pseudo-inverse π' est donné, si $C \in \mathbf{C}$, par $\pi'_C = e_{F1_C} : FC \longrightarrow G1_C$ et si $f : C \longrightarrow C'$, par $\pi'_f = \mu^{-1}_{(f,1_f,f)}$.

Ceci termine la démonstration. $\square$

Remarquons que si nous considérons le cas où $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ et où, dans la partie 2. de cette démonstration, $F = 1_{\mathbf{D}}$, nous obtenons un pseudo-foncteur $K : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ et une équivalence pseudo-naturelle $\gamma : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow KE_{\mathbf{C}}$. Cela rejoint la situation de la section 3.3 ($e^K_f \in \mathcal{E}_K$, car $e^K_f \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_K$, comme nous allons le voir ; de même pour m^K_f). Alors le pseudo-système de factorisation $(\mathcal{E}_K, \mathcal{M}_K)$ sur $\mathbf{D}$ construit à partir de (K,γ) n'est autre que $(\mathcal{E},\mathcal{M})$. Cela est dû au fait que K préserve le système de factorisation et donc $K(f,1_f,1_{C'})\circ K(1_C,1_f,f)$ (qui n'est autre, modulo γ, que la factorisation de f dans $(\mathcal{E}_K,\mathcal{M}_K)$) est une factorisation dans $(\mathcal{E},\mathcal{M})$. La factorisation dans un pseudo-système de factorisation étant essentiellement unique, e^K_f sera une équivalence (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_K$) si et seulement si e_f est une équivalence, ce qui équivaut à $f \in \mathcal{M}$. Ceci a été démontré dans [Mil], à une erreur près, dont la correction nécessite l'ajout de la partie 2. de la propriété d'orthogonalité (qui nous a servi entre autre à définir G sur les 2-flèches dans la deuxième partie de la démonstration).

Chapitre 5

Pseudo-systèmes de factorisation fidèles et pleins

5.1 1-Flèches dans une 2-catégorie

Introduisons une terminologie pour qualifier diverses sortes de flèches dans une 2-catégorie. Dans l'étude de la 2-catégorie **Cat** des catégories, dans le chapitre suivant, les appellations "fidèle" et "pleinement fidèle" seront justifiées par l'équivalence entre les notions classiques portant ce nom et celles introduites dans la définition suivante.

Définition 5.1. Soit $\mathbf{C}$ une 2-catégorie et $f : C \longrightarrow C'$.

1. f est *plein à droite* si pour tout $X \in \mathbf{C}$, $f \circ - : \mathbf{C}(X, C) \longrightarrow \mathbf{C}(X, C')$ est plein.
2. f est *plein à gauche* si pour tout $Y \in \mathbf{C}$, $- \circ f : \mathbf{C}(C', Y) \longrightarrow \mathbf{C}(C, Y)$ est plein.
3. f est *fidèle* si pour tout $X \in \mathbf{C}$, $f \circ - : \mathbf{C}(X, C) \longrightarrow \mathbf{C}(X, C')$ est fidèle ; si de plus $f \circ -$ est plein, c'est-à-dire si f est plein à droite, alors f est *pleinement fidèle*.
4. f est *cofidèle* si pour tout $Y \in \mathbf{C}$, $- \circ f : \mathbf{C}(C', Y) \longrightarrow \mathbf{C}(C, Y)$ est fidèle ; si de plus $- \circ f$ est plein, c'est-à-dire si f est plein à gauche, alors f est *pleinement cofidèle*.
5. f est *préplein* si pour tout $g, g' : X \longrightarrow C$, pour tout $h, h' : C' \longrightarrow Y$, pour tout $\alpha : fg \Rightarrow fg'$ et pour tout $\beta : hf \Rightarrow h'f$,

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & C' \arrow[d, "h"] \\
C \arrow[r, "f"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & Y
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & C' \arrow[r, "h"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & Y. \\
X \arrow[r, "g'"'] \arrow[u, "g"] & C \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "f"] & C' \arrow[u, "h'"']
\end{tikzcd}
\tag{5.1}
$$

Montrons maintenant que toute 1-flèche dans une 2-catégorie qui se factorise en une 1-flèche pleine à gauche suivie d'une 1-flèche pleine à droite est prépleine.

Proposition 5.2. *Soit $f : C \longrightarrow C'$ dans une 2-catégorie $\mathbf{C}$. S'il existe $I \in \mathbf{C}$, $e : C \longrightarrow I$ plein à gauche, $m : I \longrightarrow C'$ plein à droite, et $\varphi : me \Rightarrow f$ inversible, alors f est préplein. En particulier, comme les isos sont pleins à gauche et à droite, toute flèche pleine à droite ou à gauche est prépleine.*

Preuve. Considérons la situation du point 5. de la définition 5.1. Posons $\beta' = (h' * \varphi^{-1})\beta(h * \varphi) : hme \Rightarrow h'me$. Comme e est plein à gauche, il existe $\delta : hm \Rightarrow h'm$ tel que $\delta * e = \beta'$. De même, si $\alpha' = (\varphi^{-1} * g')\alpha(\varphi * g) : meg \Rightarrow meg'$, comme m est plein à droite, il existe $\gamma : eg \Rightarrow eg'$ tel que $m * \gamma = \alpha'$. Alors les deux membres de l'équation 5.1 sont égaux à la 2-flèche

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] \arrow[r, phantom, shift left=-4ex, "\Downarrow\varphi^{-1}"] & & C' \arrow[dr, "h"] & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & & I \arrow[ur, "m"] \arrow[dr, "m"] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\delta"] & & Y, \\
 & C \arrow[rr, "f"'] \arrow[ur, "e"] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\varphi"] & & C' \arrow[ur, "h'"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

et sont donc égaux entre eux. □

Définition 5.3. Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ un pseudo-système de factorisation sur une 2-catégorie $\mathbf{C}$.

1. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est *fidèle* si tout $e \in \mathcal{E}$ est cofidèle, et si tout $m \in \mathcal{M}$ est fidèle.
2. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est *plein à gauche* si pour tout $e \in \mathcal{E}$, e est plein à gauche.
3. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est *plein à droite* si pour tout $m \in \mathcal{M}$, m est plein à droite.
4. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est *plein* s'il est plein à gauche et à droite.

Proposition 5.4. *Soit $\mathbf{C}$ une 2-catégorie. Soit f une 1-flèche dans $\mathbf{C}$. Ces trois propriétés sont équivalentes.*

1. *f est une équivalence.*
2. *$f \circ -$ est une équivalence.*
3. *$- \circ f$ est une équivalence.*

Preuve. Prouvons l'équivalence de 1. et 2., l'équivalence de 1. et 3. s'en déduisant par dualité.

Soit $f : C \longrightarrow C'$ une équivalence ; notons f' son pseudo-inverse et $\eta : 1_{C'} \Rightarrow ff'$ et $\varepsilon : f'f \Rightarrow 1_C$ les deux transformations naturelles inversibles vérifiant les identités triangulaires. $f \circ -$ est plein car si $\alpha : fg \Rightarrow fg'$, posons $\gamma = (\varepsilon * g) \circ (f' * \alpha) \circ (\varepsilon^{-1} * g)$. Il est facile de voir que $f * \gamma = \alpha$, en utilisant les identités triangulaires. $f \circ -$ est fidèle car si $f * \alpha = f * \beta$, $\alpha = (\varepsilon * g') \circ (f'f * \alpha) \circ (\varepsilon^{-1} * g) = (\varepsilon * g') \circ (f'f * \beta) \circ (\varepsilon^{-1} * g) = \beta$. Enfin, $f \circ -$ est essentiellement surjectif car si $h : X \longrightarrow C'$, posons $g = f'h$, et alors fg est isomorphe à h via la 2-flèche $\eta * h$.

Supposons maintenant que $f \circ -$ est une équivalence. Considérons $1_{C'} : C' \longrightarrow C'$; étant donné que $f \circ -$ est essentiellement surjectif, il existe $f' : C' \longrightarrow C$ et $\eta : 1_{C'} \Rightarrow ff'$ inversible. Considérons alors $\eta^{-1} * f : ff'f \Rightarrow f$; la plénitude de $f \circ -$ implique l'existence d'une 2-flèche inversible $\varepsilon : f'f \Rightarrow 1_C$ telle que $f * \varepsilon = (\eta * f)^{-1}$, ce qui donne déjà une des identités triangulaires. L'autre est obtenue par la fidélité de $f \circ -$: $f * ((\varepsilon * f') \circ (f' * \eta)) = (\eta^{-1} * ff') \circ (ff' * \eta) = \eta^{-1} * \eta = (1_{C'} * \eta) \circ (\eta^{-1} * 1_{C'}) = \eta \circ \eta^{-1} = ff'$. □

La proposition suivante est un corollaire immédiat de la proposition 5.2.

Proposition 5.5. *Si $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est un système de factorisation plein sur une 2-catégorie $\mathbf{C}$, alors toute flèche de $\mathbf{C}$ est prépleine (autrement dit, $\mathbf{C}$ est une 2-catégorie* prépleine*).*

Dans ce chapitre, nous allons construire les 2-catégories avec système de factorisation fidèle, fidèle et plein à gauche ou fidèle et plein à droite, libres sur une 2-catégorie quelconque. Nous allons aussi construire la 2-catégorie avec système de factorisation plein et fidèle libre sur une 2-catégorie prépleine. Le diagramme 5.20 donne une vision d'ensemble de ces constructions, qui généralisent le théorème 2.10.

5.2 Systèmes de factorisation fidèles

Définition 5.6. $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ est la 2-catégorie dont les objets et les 1-flèches sont les mêmes que ceux de $\mathbf{C}^2$ et si (u, φ, v) et (w, ψ, x) sont deux 1-flèches de f vers g,

$$\mathrm{Fr}\mathbf{C}((u, \varphi, v), (w, \psi, x)) = \mathbf{C}^2((u, \varphi, v), (w, \psi, x))/\sim$$

où $(\alpha, \beta) \sim (\alpha', \beta')$ si $g * \alpha = g * \alpha'$ (ou de manière équivalente, $\beta * f = \beta' * f$). Notons $[\alpha, \beta]$ la classe de (α, β). Les compositions des 2-flèches se font comme dans $\mathbf{C}^2$, modulo $\sim$: $[\alpha', \beta'] \circ [\alpha, \beta] = [\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta]$ et $[\gamma, \delta] * [\alpha, \beta] = [\gamma * \alpha, \delta * \beta]$; elles sont bien définies.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\ \Downarrow\alpha'"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "g"] \\ C' \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "x"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\ \Downarrow\beta'"] & D' \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

Définissons un pseudo-système de factorisation sur $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ via la proposition 3.10. $K' : (\mathrm{Fr}\mathbf{C})^2 \longrightarrow \mathrm{Fr}\mathbf{C}$ est défini de manière analogue au 2-foncteur $K : (\mathbf{C}^2)^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$ du début de la section 4.1. Pour les objets $(a_1, \alpha, a_2) : f \longrightarrow g$, rien ne change : nous prenons $K'(a_1, \alpha, a_2) = K(a_1, \alpha, a_2) = ga_1$. Si $((m_1, \mu, m_2), [\varphi_1, \varphi_2], (n_1, \nu, n_2)) : (a_1, \alpha, a_2) \longrightarrow (b_1, \beta, b_2)$ est une 1-flèche, son image par K' est définie comme étant celle par K de $((m_1, \mu, m_2), (\varphi_1, \varphi_2), (n_1, \nu, n_2)) : (a_1, \alpha, a_2) \longrightarrow (b_1, \beta, b_2)$, c'est-à-dire la flèche représentée par le diagramme 4.1. Il est facile de montrer que cette flèche est indépendante du représentant de la classe $[\varphi_1, \varphi_2]$. Enfin, si $([\sigma_1, \sigma_2], [\tau_1, \tau_2])$

est une 2-flèche de $(\mathrm{Fr}\mathbf{C})^2$, nous prenons pour image par K' la classe $[\sigma_1, \tau_2]$, qui ne dépend pas non plus du choix des représentants des classes de départ. Pour les 2-flèches de cohérence κ et ι, nous prenons les classes d'équivalences de celles de K.

Nous obtenons ainsi un 2-foncteur K' tel que $K'E_{\mathrm{Fr}\mathbf{C}} = 1_{\mathrm{Fr}\mathbf{C}}$. Les 1-flèches de $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ sont factorisées comme dans $\mathbf{C}^2$ (voir le diagramme 3.11). Si nous posons $\mathcal{E}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}} = \{(u,\varphi,v) \mid m_{(u,\varphi,v)}$ est une équivalence dans $\mathrm{Fr}\mathbf{C}\}$ et $\mathcal{M}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}} = \{(u,\varphi,v) \mid e_{(u,\varphi,v)}$ est une équivalence dans $\mathrm{Fr}\mathbf{C}\}$, nous obtenons un pseudo-système de factorisation $(\mathcal{E}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}}, \mathcal{M}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}})$.

Proposition 5.7. $(\mathcal{E}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}}, \mathcal{M}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}})$ *est fidèle.*

Preuve. Soit e dans $\mathcal{E}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}}$. Comme $- \circ e = - \circ (m_e \circ e_e) = (- \circ e_e) \circ (- \circ m_e)$ et comme m_e est une équivalence car $e \in \mathcal{E}^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}}$ et donc $(- \circ m_e)$ est une équivalence, $- \circ e$ est fidèle si et seulement si $- \circ e_e$ est fidèle. Nous pouvons donc nous limiter à vérifier que les $e_{(u,\varphi,v)}$ sont cofidèles.

Soit donc une 1-flèche $(u,\varphi,v) : f \longrightarrow g$ dans $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$. $e_{(u,\varphi,v)} = (1_C, \varphi, v) : f \longrightarrow gu$ (voir le diagramme 3.11). Soit h un objet fixé de $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$. Soit $[\alpha,\beta], [\alpha',\beta'] : (w,\psi,x) \Rightarrow (w',\psi',x') : gu \longrightarrow h$ tels que

$$[\alpha,\beta] * (1_C,\varphi,v) = [\alpha, \beta * v] = [\alpha', \beta' * v] = [\alpha',\beta'] * (1_C,\varphi,v). \tag{5.4}$$

Il faut voir que $[\alpha,\beta] = [\alpha',\beta']$. Or l'équation 5.4 équivaut à $h * \alpha = h * \alpha'$, ce qui équivaut à $[\alpha,\beta] = [\alpha',\beta']$. $(1_C,\varphi,v)$ est donc bien cofidèle. □

Considérons désormais la sous-3-catégorie pleine $2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{sf}}$ de $2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ des 2-catégories avec pseudo-système de factorisation fidèle. Il y a un 3-foncteur d'oubli $U^{\mathrm{f}} : 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{sf}} \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}$. Construisons un 3-foncteur $\mathrm{Fr} : 2\text{-}\mathbf{Cat} \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{sf}}$ qui sera son 3-adjoint à gauche. J'ai déjà défini $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$, l'image par Fr de la 2-catégorie $\mathbf{C}$. Si $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est un pseudo-foncteur, $\mathrm{Fr}F$ est égal à F^2 sur les objets et sur les flèches et si $[\alpha,\beta]$ est une 2-flèche de $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$, $\mathrm{Fr}F([\alpha,\beta]) = [F^2(\alpha,\beta)]$. De même, si $\mu : F \Rightarrow G$ est une transformation pseudo-naturelle, $\mathrm{Fr}\mu_f = \mu^2_f$ et $\mathrm{Fr}\mu_{(u,\varphi,v)} = [\mu^2_{(u,\varphi,v)}]$. Enfin, si $\Gamma : \mu \Rrightarrow \nu$ est une modification, posons $\mathrm{Fr}\Gamma_f = [\Gamma^2_f]$. Il est facile de voir que tout cela est bien défini.

Avant de démontrer que $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ est la 2-catégorie avec système de factorisation fidèle libre sur $\mathbf{C}$, considérons le 2-foncteur $P_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathrm{Fr}\mathbf{C}$ qui envoie f sur f, (u,φ,v) sur (u,φ,v) et (α,β) sur $[\alpha,\beta]$. P est une transformation 3-naturelle (stricte) de $(.)^2$ vers $i \circ \mathrm{Fr}$, où $i : 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{sf}} \hookrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$.

Définissons alors une transformation faiblement 3-naturelle $E^{\mathrm{f}} : 1_{2\text{-}\mathbf{Cat}} \Rightarrow U^{\mathrm{f}} \circ \mathrm{Fr}$ par $E^{\mathrm{f}} = (U * P) \circ E$ où E était l'unité de l'adjonction 4.1. E^{f} sera l'unité de l'adjonction $\mathrm{Fr} \dashv U^{\mathrm{f}}$.

Théorème 5.8. Fr *est 3-adjoint à gauche de* U^{f}*.*

Preuve. Il faut prouver que pour toute 2-catégorie $\mathbf{C}$, pour tout $(\mathbf{D},(\mathcal{E},\mathcal{M})) \in 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{sf}}$, le 2-foncteur $- \circ E^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}} : 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{sf}}(\mathrm{Fr}\mathbf{C}, (\mathbf{D},(\mathcal{E},\mathcal{M}))) \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}(\mathbf{C},\mathbf{D})$ est une biéquivalence. Comme $E^{\mathrm{f}}_{\mathbf{C}} = P_{\mathbf{C}} \circ E_{\mathbf{C}}$ et que le théorème 4.1 nous assure que $- \circ E_{\mathbf{C}}$ est une biéquivalence, il suffit de prouver que

$$- \circ P_{\mathbf{C}} : 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{sf}}(\mathrm{Fr}\mathbf{C}, (\mathbf{D},(\mathcal{E},\mathcal{M}))) \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}(\mathbf{C}^2, (\mathbf{D},(\mathcal{E},\mathcal{M}))) \tag{5.5}$$

est une biéquivalence (où $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est fidèle).

Montrer que si $F, G : \mathrm{Fr}\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ sont des pseudo-foncteurs préservant le système de factorisation, $(- \circ P_{\mathbf{C}})_{F,G}$ est une équivalence, est facile. Le seul point intéressant est la construction, si $G : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{D}$ est un pseudo-foncteur qui préserve le système de factorisation, d'un pseudo-foncteur $F : \mathrm{Fr}\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ qui préserve le système de factorisation, muni d'une équivalence pseudo-naturelle $\pi : FP_{\mathbf{C}} \Rightarrow G$.

Définissons F sur un objet f de $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ par $Ff = Gf$; si $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$, posons $F(u, \varphi, v) = G(u, \varphi, v)$; et si $[\alpha, \beta] : (u, \varphi, v) \Rightarrow (w, \psi, x)$ dans $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$, posons $F([\alpha, \beta]) = G(\alpha, \beta)$. Alors $FP_{\mathbf{C}} = G$ et nous prenons $\pi = \mathrm{Id}$.

Il reste à montrer que F est bien défini. Supposons $[\alpha, \beta] = [\gamma, \delta] : (u, \varphi, v) \Rightarrow (w, \psi, x) : f \longrightarrow g$ et voyons que $G(\alpha, \beta) = G(\gamma, \delta)$. Par l'axiome 1. de pseudo-foncteur (définition 1.3), $G(g * \alpha, \beta * f) =$

$$\begin{tikzcd} G1_C \arrow[r, "G(1_C{,}1_f{,}f)"] \arrow[rrr, bend left=40, "G(gu{,}\varphi{,}vf)"] \arrow[rrr, bend right=40, "G(gw{,}\psi{,}xf)"'] \arrow[rrr, phantom, bend left=25, "\Downarrow\kappa^{-1}"] \arrow[rrr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\kappa"] & Gf \arrow[r, bend left, "G(u{,}\varphi{,}v)"] \arrow[r, bend right, "G(w{,}\psi{,}x)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G(\alpha{,}\beta)"] & Gg \arrow[r, "G(g{,}1_g{,}1_{D'})"] & G1_{D'} \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

et $G(g * \gamma, \delta * f) =$

$$\begin{tikzcd} G1_C \arrow[r, "G(1_C{,}1_f{,}f)"] \arrow[rrr, bend left=40, "G(gu{,}\varphi{,}vf)"] \arrow[rrr, bend right=40, "G(gw{,}\psi{,}xf)"'] \arrow[rrr, phantom, bend left=25, "\Downarrow\kappa^{-1}"] \arrow[rrr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\kappa"] & Gf \arrow[r, bend left, "G(u{,}\varphi{,}v)"] \arrow[r, bend right, "G(w{,}\psi{,}x)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G(\gamma{,}\delta)"] & Gg \arrow[r, "G(g{,}1_g{,}1_{D'})"] & G1_{D'}. \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

Comme $[\alpha, \beta] = [\gamma, \delta]$, c'est-à-dire $g * \alpha = g * \gamma$ ou $\beta * f = \delta * f$, $G(g * \alpha, \beta * f) = G(g * \gamma, \delta * f)$, c'est-à-dire les 2-flèches 5.6 et 5.7 sont égales, d'où nous déduisons que que

$$G(g, 1_g, 1_{D'}) * G(\alpha, \beta) * G(1_C, 1_f, f) = G(g, 1_g, 1_{D'}) * G(\gamma, \delta) * G(1_C, 1_f, f).$$

Comme $(g, 1_g, 1_{D'}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{C}}$ et G préserve le système de factorisation, $G(g, 1_g, 1_{D'}) \in \mathcal{M}$ et comme $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est fidèle, $G(g, 1_g, 1_{D'})$ est fidèle. Nous en concluons que

$$G(\alpha, \beta) * G(1_C, 1_f, f) = G(\gamma, \delta) * G(1_C, 1_f, f).$$

De même, $G(1_C, 1_f, f)$ est cofidèle et $G(\alpha, \beta) = G(\gamma, \delta)$. □

5.3 Systèmes de factorisation fidèles et pleins à gauche ou à droite

Définition 5.9. $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ est la 2-catégorie dont les objets et les 1-flèches sont les mêmes que ceux de $\mathbf{C}^2$ et où une 2-flèche de $(u,\varphi,v) \Rightarrow (w,\psi,x) : f \longrightarrow g$ est une classe d'équivalence de 2-flèches $\alpha : u \Rightarrow w$ pour la relation d'équivalence $\alpha \sim \alpha'$ ssi $g * \alpha = g * \alpha'$. Notons $[\alpha]$ la classe de α. Les compositions des 2-flèches se fait naturellement : $[\alpha'] \circ [\alpha] = [\alpha' \circ \alpha]$ et $[\gamma] * [\alpha] = [\gamma * \alpha]$; elles sont bien définies.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\ \Downarrow\alpha'"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "g"] \\ C' \arrow[r, dotted, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "x"'] & D' \end{tikzcd} \tag{5.8}$$

Définition 5.10. $\mathrm{Fr}^{\mathrm{m}}\mathbf{C}$ est la 2-catégorie dont les objets et les 1-flèches sont les mêmes que ceux de $\mathbf{C}^2$ et où une 2-flèche de $(u,\varphi,v) \Rightarrow (w,\psi,x) : f \longrightarrow g$ est une classe d'équivalence de 2-flèches $\beta : v \Rightarrow x$ pour la relation d'équivalence $\beta \sim \beta'$ ssi $\beta * f = \beta' * f$. Notons $[\beta]$ la classe de β. Les compositions des 2-flèches se fait naturellement : $[\beta'] \circ [\beta] = [\beta' \circ \beta]$ et $[\delta] * [\beta] = [\delta * \beta]$; elles sont bien définies.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, dotted, bend right, "w"'] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "g"] \\ C' \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "x"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\ \Downarrow\beta'"] & D' \end{tikzcd} \tag{5.9}$$

Les traitements de $\mathrm{Fr}^{\mathrm{m}}\mathbf{C}$ et de $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ sont tout à fait similaires ; je me limiterai à étudier $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$.

Dotons $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ d'un pseudo-système de factorisation, comme pour $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$, à partir d'un 2-foncteur $K^{\mathrm{e}} : (\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C})^2 \longrightarrow \mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ tel que $K^{\mathrm{e}}E_{\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}} = 1_{\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}}$. K^{e} est défini de manière analogue à K (section 4.1) :

1. si $(a_1,\alpha,a_2) : f \longrightarrow g$ est un objet de $(\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C})^2$, nous posons $K^{\mathrm{e}}(a_1,\alpha,a_2) = K(a_1,\alpha,a_2) = ga_1$;
2. si $((m_1,\mu,m_2),[\varphi_1],(n_1,\nu,n_2)) : (a_1,\alpha,a_2) \longrightarrow (b_1,\beta,b_2)$ est une 1-flèche dans $(\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C})^2$, son image par K^{e} est la flèche 4.1, qui ne dépend pas du choix du représentant de la classe $[\varphi_1]$;
3. si $([\sigma_1],[\tau_1])$ est une 2-flèche de $(\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C})^2$, posons $K^{\mathrm{e}}([\sigma_1],[\tau_1]) = [\sigma_1]$, qui est évidemment indépendant des représentants des classes $[\sigma_1]$ et $[\tau_1]$.

Nous obtenons ainsi un pseudo-système de factorisation $(\mathcal{E}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{C}},\mathcal{M}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{C}})$.

Proposition 5.11. *$(\mathcal{E}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{C}},\mathcal{M}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{C}})$ est fidèle et plein à gauche.*

Preuve. Comme pour la proposition 5.7, nous pouvons nous limiter à considérer les $e_{(u,\varphi,v)} = (1_C, \varphi, v)$ et $m_{(u,\varphi,v)} = (u, 1_{gu}, 1_{D'})$. Si $h \in \mathbf{C}^2$ et $(w,\psi,x),(w',\psi',x') : gu \longrightarrow h$, une 2-flèche de $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ de (w,ψ,x) vers (w',ψ',x') est une classe d'équivalence $[\alpha]$ de 2-flèches $\alpha : w \Rightarrow w'$. D'autre part, une 2-flèche de $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ de $(w,\psi,x)\circ(1_C,\varphi,v)$ vers $(w',\psi',x')\circ(1_C,\varphi,v)$ est aussi une classe $[\alpha]$ de 2-flèches $\alpha : w \Rightarrow w'$. Comme $-\circ(1_C,\varphi,v)$ envoie $[\alpha]$ sur elle-même, c'est une bijection et donc $(1_C,\varphi,v)$ est pleinement cofidèle. Il est facile de voir de manière analogue que $(u, 1_{gu}, 1_{D'})$ est fidèle. □

Considérons maintenant la sous-3-catégorie pleine $2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{sf}} \hookrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ des 2-catégories avec système de factorisation fidèle et plein à gauche, le 3-foncteur d'oubli $U^{\mathrm{e}} : 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{sf}} \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}$ et un 3-foncteur $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}} : 2\text{-}\mathbf{Cat} \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{sf}}$, construit de manière analogue à Fr.

Si $\mathbf{C}$ est une 2-catégorie, $P^{\mathrm{e}}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ envoie (α,β) sur $[\alpha]$. P^{e} forme une transformation 3-naturelle de $(.)^2$ vers $i \circ \mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}$, où $i : 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{sf}} \hookrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$. Définissons alors une transformation faiblement 3-naturelle $E^{\mathrm{e}} : 1_{2\text{-}\mathbf{Cat}} \Rightarrow U^{\mathrm{e}} \circ \mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}$ par $E^{\mathrm{e}} = (U * P^{\mathrm{e}}) \circ E$.

Théorème 5.12. Fr^{e} *est 3-adjoint à gauche de* U^{e}.

Preuve. Comme pour le théorème 5.8, il faut prouver que

$$- \circ P^{\mathrm{e}}_{\mathbf{C}} : 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{sf}}(\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}, (\mathbf{D}, (\mathcal{E}, \mathcal{M}))) \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}(\mathbf{C}^2, (\mathbf{D}, (\mathcal{E}, \mathcal{M}))) \tag{5.10}$$

est une biéquivalence (où $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ est fidèle et plein à gauche).

La partie intéressante est de construire, si $G : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{D}$ est un pseudo-foncteur qui préserve le système de factorisation, un pseudo-foncteur $F : \mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ qui préserve le système de factorisation, muni d'une équivalence pseudo-naturelle $\pi : FP^{\mathrm{e}}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G$.

Si $f \in \mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$, posons $F(f) = G(f)$; si $(u,\varphi,v) : f \longrightarrow g$ dans $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$, posons $F(u,\varphi,v) = G(u,\varphi,v)$. La construction de $F([\alpha])$ est plus délicate. Soit $[\alpha] : (u,\varphi,v) \Rightarrow (w,\psi,x) : f \longrightarrow g$. Posons $\nu_{[\alpha]} = \psi^{-1}(g*\alpha)\varphi : vf \Rightarrow xf$. $\nu_{[\alpha]}$ ne dépend pas du représentant de la classe $[\alpha]$ car il ne fait intervenir que $g*\alpha$. Alors considérons la 2-flèche $\xi_{[\alpha]} =$

$$\begin{tikzcd}
 & Gf \arrow[dr, "G(u{,}\varphi{,}v)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\kappa"] & \\
G1_C \arrow[ur, "G(1_C{,}1_f{,}f)"] \arrow[rr, bend left=10, "G(u{,}\varphi{,}vf)"] \arrow[rr, bend right=10, "G(w{,}\psi{,}xf)"'] \arrow[dr, "G(1_C{,}1_f{,}f)"'] & \Downarrow G(\alpha,\nu) & Gg. \\
 & Gf \arrow[ur, "G(w{,}\psi{,}x)"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\kappa^{-1}"] &
\end{tikzcd} \tag{5.11}$$

Comme $(1_C, 1_f, f) \in \mathcal{E}_{\mathbf{C}}$ et G préserve le système de factorisation, $G(1_C,1_f,f) \in \mathcal{E}$. Comme $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ est plein à gauche, $G(1_C,1_f,f)$ est pleinement cofidèle. Dès lors il existe une unique 2-flèche $F([\alpha]) : G(u,\varphi,v) \Rightarrow G(w,\psi,x)$ telle que

$$F([\alpha]) * G(1_C, 1_f, f) = \xi_{[\alpha]}. \tag{5.12}$$

F est bien défini, car si $[\alpha] = [\gamma]$ (c'est-à-dire $g * \alpha = g * \gamma$), $\xi_{[\alpha]} = \xi_{[\gamma]}$ (et donc $F([\alpha]) = F([\gamma])$ comme tous les deux vérifient l'équation 5.12). En effet, comme $G(g, 1_g, 1_{D'})$ est fidèle, cela revient à voir $G(g, 1_g, 1_{D'}) * \xi_{[\alpha]} = G(g, 1_g, 1_{D'}) * \xi_{[\gamma]}$, ce qui revient à voir que $G(g, 1_g, 1_{D'}) * G(\alpha, \nu_{[\alpha]}) = G(g, 1_g, 1_{D'}) * G(\gamma, \nu_{[\gamma]})$; ceci est bien le cas car le membre de gauche est $G(g * \alpha, \nu_{[\alpha]})$ et celui de droite est $G(g * \gamma, \nu_{[\gamma]})$ et nous savons que $\nu_{[\alpha]} = \nu_{[\gamma]}$ et $g * \alpha = g * \gamma$.

Il est possible alors de vérifier que F est un pseudo-foncteur qui préserve le système de factorisation. Enfin, posons $\pi = \mathrm{Id}$, car si $(\alpha, \beta) : (u, \varphi, v) \Rightarrow (w, \psi, x) : f \longrightarrow g$ est une 2-flèche dans $\mathbf{C}^2$, $F([\alpha]) = G(\alpha, \beta)$. Pour voir cela, il suffit de voir que $G(\alpha, \beta)$ vérifie l'équation 5.12. C'est bien le cas car $\nu_{[\alpha]} = \psi^{-1}(g * \alpha)\varphi = \beta * f$ car (α, β) est une 2-flèche de $\mathbf{C}^2$, et alors, par l'axiome 1. de pseudo-foncteur (définition 1.3),

$$\begin{tikzcd}
& Gf \arrow[dr, "G(u,\varphi,v)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\kappa"] & \\
G1_C \arrow[ur, "G(1_C,1_f,f)"] \arrow[dr, "G(1_C,1_f,f)"'] \arrow[rr, bend left, "G(u,\varphi,vf)"] \arrow[rr, bend right, "G(w,\psi,xf)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow G(\alpha,\beta*f)"] & {} & Gg \\
& Gf \arrow[ur, "G(w,\psi,x)"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\kappa^{-1}"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
G1_C \arrow[r, "G(1_C,1_f,f)"] & Gf \arrow[r, bend left, "G(u,\varphi,v)"] \arrow[r, bend right, "G(w,\psi,x)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G(\alpha,\beta)"] & Gg,
\end{tikzcd}
\tag{5.13}$$

ce qui clôt la démonstration. □

5.4 Systèmes de factorisation pleins et fidèles

Définition 5.13. Soit $\mathbf{C}$ une 2-catégorie prépleine (c'est-à-dire toutes les 1-flèches sont prépleines). $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}$ est la 2-catégorie dont les objets et les 1-flèches sont les mêmes que ceux de $\mathbf{C}^2$ et où une 2-flèche de $(u, \varphi, v) \Rightarrow (w, \psi, x) : f \longrightarrow g$ est une 2-flèche $\mu : gu \Rightarrow gw$. Cela revient à donner une 2-flèche $vf \Rightarrow xf$, notée $\breve{\mu}$; la relation qui les lie est $\breve{\mu} = \psi^{-1}\mu\varphi$. La 2-flèche composée de $\mu : (u, \varphi, v) \Rightarrow (u', \varphi', v')$ (c'est-à-dire $\mu : gu \Rightarrow gu'$) et de $\mu' : (u', \varphi', v') \Rightarrow (u'', \varphi'', v'')$ (où $\mu' : gu' \Rightarrow gu''$) est tout simplement $\mu' \circ \mu : gu \Rightarrow gu''$. La composition horizontale est plus délicate.

Soit $\mu : (u, \varphi, v) \Rightarrow (u', \varphi', v') : f \longrightarrow g$ et $\nu : (w, \psi, x) \Rightarrow (w', \psi', x') : g \longrightarrow h$. Posons $\tau_{\mu,\nu} =$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mu"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\breve{\nu}"] & D' \arrow[d, "x"] \\
D \arrow[r, "g"'] & D' \arrow[r, "x'"'] & E'.
\end{tikzcd}
\tag{5.14}$$

Comme $\mathbf{C}$ est prépleine (et donc g est préplein), $\tau_{\mu,\nu}$ est aussi égal à

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] & D' \arrow[r, "x"] & E'. \\ C \arrow[u, "u"] \arrow[r, "u'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\mu"] & D \arrow[u, "g"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\check{\nu}"] & D' \arrow[u, "x'"'] \end{tikzcd} \tag{5.15}$$

Alors posons $\nu * \mu = (\psi' * u') \circ \tau_{\mu,\nu} \circ (\psi^{-1} * u) : hwu \Rightarrow hw'u'$. Nous pouvons vérifier que $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}$ est une 2-catégorie. Le point délicat est la loi d'échange qui est vérifiée grâce à la préplénitude de $\mathbf{C}$.

Nous procédons comme auparavant pour définir un système de factorisation sur $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}$, en utilisant le théorème 3.10. Définissons donc $K^{\mathrm{p}} : (\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C})^2 \longrightarrow \mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}$.

1. K^{p} envoie $(a_1, \alpha, a_2) : f \longrightarrow g$ sur ga_1.
2. Si $((m_1, \mu, m_2), \chi, (n_1, \nu, n_2)) : (a_1, \alpha, a_2) \longrightarrow (b_1, \beta, b_2)$ est une 1-flèche de $(\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C})^2$ (où $(a_1, \alpha, a_2) : f \longrightarrow g$, $(b_1, \beta, b_2) : h \longrightarrow k$ et $\chi : kn_1a_1 \Rightarrow kb_1m_1$), choisissons comme image sous K^{p} la flèche $(m_1, \chi \circ (\nu * a_1), n_2)$.
3. Si $(\sigma, \tau) : ((m_1, \mu, m_2), \chi, (n_1, \nu, n_2)) \Rightarrow ((o_1, o, o_2), \chi', (p_1, \pi, p_2))$ est une 2-flèche dans $(\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C})^2$, posons $K^{\mathrm{p}}(\sigma, \tau) =$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, "b_1"] \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\sigma"] & F \arrow[dr, "k"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta^{-1}"] & \\ C \arrow[ur, "m_1"] \arrow[dr, "o_1"'] & {} & E' \arrow[r, "b_2"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & F'. \\ & E \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "b_1"'] & F \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd} \tag{5.16}$$

Alors $K^{\mathrm{p}}E_{\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}} = 1_{\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}}$ et nous obtenons un système de factorisation $(\mathcal{E}^{\mathrm{p}}_{\mathbf{C}}, \mathcal{M}^{\mathrm{p}}_{\mathbf{C}})$.

Proposition 5.14. *$(\mathcal{E}^{\mathrm{p}}_{\mathbf{C}}, \mathcal{M}^{\mathrm{p}}_{\mathbf{C}})$ est plein et fidèle.*

Preuve. Il est facile de voir que, si $(u, \varphi, v) : f \longrightarrow g$ et $(w, \psi, x), (w', \psi', x') : gu \longrightarrow h$ sont des flèches de $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}$, les 2-flèches de $(w, \psi, x) \circ e_{(u,\varphi,v)}$ vers $(w', \psi', x') \circ e_{(u,\varphi,v)}$ sont exactement les 2-flèches de (w, ψ, x) vers (w', ψ', x'), et que $- \circ e_{(u,\varphi,v)}$ est l'identité sur les 2-flèches et donc $e_{(u,\varphi,v)}$ est pleinement cofidèle. De même pour $m_{(u,\varphi,v)}$. □

Considérons maintenant la 3-catégorie $2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}$ des 2-catégories prépleines et la sous-3-catégorie $2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}} \hookrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}_{\mathrm{sf}}$ des 2-catégories avec système de factorisation plein et fidèle. Il y a un 3-foncteur d'oubli $U^{\mathrm{p}} : 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}} \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}$. Comme dans les sections précédentes, nous définissons un 3-foncteur $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}} : 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}} \longrightarrow 2\text{-}\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{sf}}$.

Remarquons juste que si $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est un pseudo-foncteur, $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}F : \mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C} \longrightarrow \mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{D}$ est défini sur une 2-flèche $\mu : (u, \varphi, v) \Rightarrow (u', \varphi', v') : f \longrightarrow g$ par $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}F(\mu) =$

$$\begin{tikzcd}
 & FD \arrow[dr, "Fg"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\kappa"] & \\
FC \arrow[ur, "Fu"] \arrow[rr, bend left, "F(gu)"] \arrow[rr, bend right, "F(gu')"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow F\mu"] \arrow[dr, "Fu'"'] & & FD'. \\
 & FD \arrow[ur, "Fg"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\kappa^{-1}"] &
\end{tikzcd} \tag{5.17}$$

Comme pour les sections précédentes, considérons le 2-foncteur $P^{\mathrm{p}}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathrm{Fr}\mathbf{C}$ qui envoie f sur f, (u, φ, v) sur (u, φ, v) et $(\alpha, \beta) : (u, \varphi, v) \Rightarrow (u', \varphi', v') : f \longrightarrow g$ sur $g * \alpha$.

Théorème 5.15. Fr^{p} *est 3-adjoint à gauche de* U^{p}.

Preuve. Comme pour le théorème 5.12, je me limite à voir que pour toute 2-catégorie $\mathbf{D}$ munie d'un système de factorisation plein et fidèle $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, pour toute 2-catégorie prépleine $\mathbf{C}$, pour tout $G : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{D}$ qui préserve le système de factorisation, il existe $F : \mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ qui préserve le système de factorisation, muni d'une équivalence pseudo-naturelle $\pi : FP^{\mathrm{p}}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G$.

La difficulté est de définir F sur les 2-flèches. Si $\mu : (u, \varphi, v) \Rightarrow (w, \psi, x) : f \longrightarrow g$ est une 2-flèche, considérons la 2-flèche $\xi_\mu =$

$$\begin{tikzcd}
 & Gf \arrow[r, "{G(u,\varphi,v)}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\kappa"] & Gg \arrow[dr, "{G(g,1_g,1_{D'})}"] & \\
G1_C \arrow[ur, "{G(1_C,1_f,f)}"] \arrow[rrr, bend left, "{G(gu,\varphi,vf)}"] \arrow[rrr, bend right, "{G(gw,\psi,xf)}"'] \arrow[rrr, phantom, "\Downarrow G(\mu,\breve{\mu})"] \arrow[dr, "{G(1_C,1_f,f)}"'] & & & G1_{D'}. \\
 & Gf \arrow[r, "{G(w,\psi,x)}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\kappa^{-1}"] & Gg \arrow[ur, "{G(g,1_g,1_{D'})}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.18}$$

Comme $- \circ G(1_C, 1_f, f)$ et $G(g, 1_g, 1_{D'}) \circ -$ sont pleins et fidèles, il existe un unique $F(\mu) : G(u, \varphi, v) \Rightarrow G(w, \psi, x)$ tel que

$$\xi_\mu = G(g, 1_g, 1_{D'}) * F(\mu) * G(1_C, 1_f, f). \tag{5.19}$$

Nous pouvons prendre $\pi = \mathrm{Id}$ car si $(\alpha, \beta) : (u, \varphi, v) \Rightarrow (w, \psi, x)$ dans $\mathbf{C}^2$, $F(g*\alpha) = G(\alpha, \beta)$ car $G(\alpha, \beta)$ vérifie l'équation 5.19 pour $\mu = g * \alpha$ et $F(g * \alpha)$ est unique. $\square$

5.5 Résumé

La situation que nous avons obtenu dans ce chapitre et le précédent est représentée par le diagramme suivant, où $\mathbf{C}^2$ est la 2-catégorie avec système de factorisation (quelconque) libre sur $\mathbf{C}$, $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ est la 2-catégorie avec système de factorisation fidèle libre sur $\mathbf{C}$, ... L'extrême droite du diagramme, $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}$, n'est définie que si $\mathbf{C}$ est prépleine. Les flèches indiquées sont d'une part le plongement $E_{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^2$, et d'autre part différentes projections, qui fixent les flèches et les 1-flèches, qui sont les mêmes pour toutes les 2-catégories $\mathbf{C}^2$ ou $\mathrm{Fr}^{\mathrm{x}}\mathbf{C}$, et qui envoient les 2-flèches de l'une de ces 2-catégories vers les 2-flèches plus générales de l'autre. Le 2-foncteur de $\mathbf{C}^2$ vers $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ est $P_{\mathbf{C}}$, qui envoie (α, β) sur $[\alpha, \beta]$; le 2-foncteur de $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ vers $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ envoie $[\alpha, \beta]$ sur $[\alpha]$; le 2-foncteur de $\mathrm{Fr}\mathbf{C}$ vers $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ envoie $[\alpha, \beta]$ sur $[\beta]$; le 2-foncteur de $\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}$ vers $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}$ envoie $[\alpha]$ sur $g * \alpha$; et enfin, le 2-foncteur de $\mathrm{Fr}^{\mathrm{m}}\mathbf{C}$ vers $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}$ envoie $[\beta] : (u, \varphi, v) \Rightarrow (w, \psi, x)$ sur $\psi \circ (\beta * f) \circ \varphi^{-1}$. Les 2-foncteurs $P^{\mathrm{x}}_{\mathbf{C}}$ s'obtiennent en suivant n'importe quel chemin de ce diagramme allant de $\mathbf{C}^2$ vers $\mathrm{Fr}^{\mathrm{x}}\mathbf{C}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \begin{array}{c}\mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}\\ \text{fidèle et plein}\\ \text{à gauche}\end{array} \arrow[dr] & \\
\mathbf{C} \arrow[r, hook, "E_{\mathbf{C}}"] & \begin{array}{c}\mathbf{C}^2\\ \text{quelconque}\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\mathrm{Fr}\mathbf{C}\\ \text{fidèle}\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}\\ \text{plein et}\\ \text{fidèle}\end{array} \\
 & & & \begin{array}{c}\mathrm{Fr}^{\mathrm{m}}\mathbf{C}\\ \text{fidèle et plein}\\ \text{à droite}\end{array} \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{5.20}$$

Chapitre 6

Exemples

6.1 Systèmes de factorisation sur CGS

Résumons les résultats obtenus dans l'article [K-V]. Considérons la 2-catégorie **CGS** des cat-groupes symétriques, des foncteurs monoïdaux préservant la symétrie et des transformation naturelles monoïdales.

Deux systèmes de factorisations sur **CGS** sont construits. Le premier, constitué des foncteurs pleins et essentiellement surjectifs et des foncteurs fidèles, factorise une flèche à travers le noyau de son conoyau. Le second, constitué des foncteurs essentiellement surjectifs et des foncteurs pleins et fidèles, factorise une flèche à travers le conoyau de son noyau.

Proposition 6.1. *Soit* $F : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H}$ *une 1-flèche de* **CGS**.

1. *F est fidèle au sens de la définition 5.1 si et seulement si F est fidèle au sens classique.*
2. *F est pleinement fidèle au sens de 5.1 si et seulement si F est pleinement fidèle au sens classique.*
3. *F est cofidèle (5.1) si et seulement si F est essentiellement surjectif.*
4. *F est pleinement cofidèle si et seulement si F est plein et essentiellement surjectif.*

Preuve. Seule la condition nécessaire du point 3. n'est pas démontrée dans [K-V]. La preuve suivante m'a été indiquée par E.M. Vitale.

Pour cela, rappelons un résultat de [K-V] qui est qu'un foncteur de **CGS** est essentiellement surjectif si et seulement si $\pi_0 F$ est surjectif, où π_0 est le foncteur qui envoie un cat-groupe symétrique sur le groupe abélien des classes d'isomorphisme des objets, et un morphisme de cat-groupe symétrique sur le morphisme de groupe induit.

Considérons maintenant $F : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H}$ cofidèle dans **CGS**. Nous voulons voir qu'il est essentiellement surjectif ; pour cela, il suffit de vérifier que $\pi_0(F)$ est surjectif, c'est-à-dire, dans **Ab**, que $\pi_0(F)$ est un épi. Soit $G \in \mathbf{Ab}$; il faut montrer que $- \circ \pi_0(F) : \mathbf{Ab}(\pi_0(\mathbf{H}), G) \longrightarrow \mathbf{Ab}(\pi_0(\mathbf{G}), G)$ est injectif.

Considérons alors le cat-groupe symétrique $G!$ qui est constitué d'un unique objet et dont les flèches sont les éléments de G, et le foncteur $0 : \mathbf{H} \longrightarrow G!$ qui envoie toute flèche de $\mathbf{H}$ sur le neutre de G. Nous obtenons alors une bijection $\varphi_{\mathbf{H}} : \mathbf{CGS}(\mathbf{H}, G!)(0,0) \longrightarrow \mathbf{Ab}(\pi_0(\mathbf{H}), G)$, qui envoie une transformation naturelle monoïdale $\alpha : 0 \Rightarrow 0$ sur le morphisme de groupe $\varphi_{\mathbf{H}}(\alpha) : \pi_0(\mathbf{H}) \longrightarrow G : [X] \mapsto \alpha_X$. Cette fonction est bien définie car α est naturelle, et c'est un morphisme de groupe car α est monoïdale. L'inverse de $\varphi_{\mathbf{H}}$ envoie un morphisme $f : \pi_0(\mathbf{H}) \longrightarrow G$ sur la transformation naturelle $\varphi_{\mathbf{H}}^{-1}(f)$ telle que $(\varphi_{\mathbf{H}}^{-1}(f))_X = f([X])$.

De la même façon, nous obtenons une bijection $\varphi_{\mathbf{G}} : \mathbf{CGS}(\mathbf{G}, G!)(0,0) \longrightarrow \mathbf{Ab}(\pi_0(\mathbf{G}), G)$. Le résultat escompté s'obtient alors aussitôt de la commutativité facilement vérifiée du diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{CGS}(\mathbf{H}, G!)(0,0) \arrow[r, "- \circ F"] \arrow[d, "\varphi_{\mathbf{H}}"'] & \mathbf{CGS}(\mathbf{G}, G!)(0,0) \arrow[d, "\varphi_{\mathbf{G}}"] \\
\mathbf{Ab}(\pi_0(\mathbf{H}), G) \arrow[r, "- \circ \pi_0(F)"] & \mathbf{Ab}(\pi_0(\mathbf{G}), G)
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

En effet, la cofidélité de F implique que la fonction du haut est injective, et donc, les deux flèches latérales étant des bijections, celle du bas est injective, ce que nous voulions obtenir. □

Un corollaire de ce théorème est que le premier système de factorisation sur $\mathbf{CGS}$ ($\mathcal{E}$ étant formé des foncteurs pleins et essentiellement surjectifs, et $\mathcal{M}$ étant formé des foncteurs fidèles) est fidèle et plein à gauche, tandis que le deuxième système de factorisation (foncteurs essentiellement surjectifs d'une part, et pleins et fidèles d'autre part) est fidèle et plein à droite. Ce sont d'ailleurs les seuls en leur genre. En effet, si $(\mathcal{E}', \mathcal{M}')$ était un autre système de factorisation fidèle et plein à gauche sur $\mathbf{CGS}$, nous aurions $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, car $\mathcal{E}$ est exactement l'ensemble des 1-flèches pleinement cofidèles de $\mathbf{CGS}$, et de même, $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$. Or, par la proposition 3.8, $\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\uparrow}$ et $\mathcal{E}' = \mathcal{M}'^{\uparrow}$. En général, si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$, il est facile de voir que $\mathcal{H}^{\uparrow} \subseteq \mathcal{G}^{\uparrow}$ et comme $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$, nous obtenons que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, ce qui montre que $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. De nouveau, par 3.8, $\mathcal{M} = \mathcal{E}^{\downarrow}$ et $\mathcal{M}' = \mathcal{E}'^{\downarrow}$ et donc $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$. Le fait que le deuxième système de factorisation est le seul fidèle et plein à droite se montre de la même façon.

6.2 Foncteurs en tant que 1-flèches de Cat

Nous allons donner trois pseudo-systèmes de factorisation sur la 2-catégorie des catégories, autres que les deux triviaux (qui factorisent respectivement une flèche en elle-même suivie de l'identité et l'identité suivie d'elle-même). Mais au préalable, étudions les liens entre propriétés des 1-flèches dans les 2-catégories de la définition 5.1 et les propriétés des foncteurs.

Définition 6.2. Soit $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ un foncteur.

1. F est *semi-essentiellement surjectif* si pour tout $D \in \mathbf{D}$ il existe $C \in \mathbf{C}$ et $m : D \longrightarrow FC$ mono scindé.
2. F est *stable sous monos scindés* si pour tout $D \in \mathbf{D}$, pour tout $C \in \mathbf{C}$, pour tout mono scindé $m : D \longrightarrow FC$, il existe $C' \in \mathbf{C}$ tel que $FC' \cong D$.

Il est évident qu'un foncteur est essentiellement surjectif si et seulement si il est semi-essentiellement surjectif et stable sous monos scindés. Remarquons aussi que la semi-essentielle surjectivité et l'essentielle surjectivité se confondent dans **CGS**, car les cat-groupes symétriques sont des groupoïdes ; la stabilité sous monos scindés devient elle vide de sens.

Exemple 6.3. Le foncteur d'inclusion d'une sous-catégorie réflexive est plein, fidèle et stable sous monos scindés.

Preuve. Soit $i : \mathbf{D} \hookrightarrow \mathbf{C}$ une sous-catégorie réflexive de réflexion r. Notons $\eta : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow ir$ et $\varepsilon : ri \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ l'unité et la counité.

Soit $m : C \longrightarrow iD$, un mono scindé de rétraction m', où $C \in \mathbf{C}$ et $D \in \mathbf{D}$. Alors $C \cong irC$. En effet, soit $\varphi = \eta_C : C \longrightarrow irC$ et $\psi =$

$$irC \xrightarrow{ir(m)} iriD \xrightarrow{i\varepsilon_D} iD \xrightarrow{m'} C. \tag{6.2}$$

Alors $\varphi\psi = 1_{irC}$ car le diagramme suivant commute ; le triangle inférieur commute car nous avons affaire à une sous-catégorie réflexive.

$$\begin{tikzcd}
irC \arrow[r, "ir(m)"] \arrow[d, "ir(m)"] \arrow[dd, bend right, "1_{irC}"'] & iriD \arrow[d, "i\varepsilon_D"] \arrow[dl, "1_{iriD}"] \\
iriD \arrow[d, "ir(m')"] & iD \arrow[l, "\eta_{iD}"] \arrow[d, "m'"] \\
irC & C \arrow[l, "\eta_C"]
\end{tikzcd} \tag{6.3}$$

Par un diagramme analogue, $\psi\varphi = 1_C$ et φ est l'isomorphisme recherché. □

Proposition 6.4. *Soit $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ un foncteur.*

1. *F est fidèle au sens de la définition 5.1 si et seulement si F est fidèle au sens classique.*
2. *F est pleinement fidèle au sens de la définition 5.1 si et seulement si F est pleinement fidèle au sens classique.*
3. *F est pleinement fidèle et $F \circ -$ est stable sous monos scindés si et seulement si F est plein, fidèle et stable sous monos scindés.*
4. *Si F est semi-essentiellement surjectif, alors F est cofidèle.*
5. *Si F est plein et semi-essentiellement surjectif, F est pleinement cofidèle.*
6. *Si F est plein et essentiellement surjectif, alors F est pleinement cofidèle et $- \circ F$ est stable sous monos scindés.*

7. *Si F est plein, alors F est préplein (au sens de la définition 5.1).*

Preuve. 1. Si $F \circ -$ est fidèle, et $g, h : C \longrightarrow C'$ sont deux flèches dans $\mathbf{C}$ telles que $Fg = Fh$, nous pouvons les considérer comme des transformations naturelles entre les foncteurs $C : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}$ et $C' : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}$, qui envoient l'unique objet de $\mathbf{1}$ respectivement sur C et C' ; cela permet d'utiliser immédiatement l'hypothèse.

   Si F est fidèle et $\alpha, \beta : G \Rightarrow H : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{C}$ sont tels que $F * \alpha = F * \beta$, pour tout $X \in \mathbf{X}$, $F\alpha_X = F\beta_X$ et donc $\alpha_X = \beta_X$.

2. La démonstration est analogue à celle du point 1.
3. La démonstration est semblable à celle du point 1.
4. Soit $G, H : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{Y}$ deux foncteurs et $\alpha, \beta : G \Rightarrow H$ deux transformations naturelles telles que $\alpha * F = \beta * F$. Soit $D \in \mathbf{D}$. Comme F est semi-essentiellement surjectif, il existe $C \in \mathbf{C}$ et $m : D \longrightarrow FC$ mono scindé. Considérons alors le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} GD \arrow[r, "Gm"] \arrow[d, shift right, "\alpha_D"'] \arrow[d, shift left, "\beta_D"] & GFC \arrow[d, shift right, "\alpha_{FC}"'] \arrow[d, shift left, "\beta_{FC}"] \arrow[d, phantom, "="] \\ HD \arrow[r, "Hm"'] & HFC \end{tikzcd} \tag{6.4}$$

   Par naturalité, il commute pour α et pour β, et nous assure que $H(m) \circ \alpha_D = \alpha_{FC} \circ G(m) = \beta_{FC} \circ G(m) = H(m) \circ \beta_D$. Comme m est un mono scindé, $H(m)$ est un mono et donc $\alpha_D = \beta_D$. Nous concluons que $- \circ F$ est fidèle.

5. Ceci est démontré dans le lemme 4.1 de [K-V], dans le cas de **CGS**, pour les foncteurs pleins et essentiellement surjectifs. Il n'est pas difficile de voir que la démonstration marche dans **Cat** pour les foncteurs pleins et semi-essentiellement surjectifs.
6. Par le point précédent, F est pleinement cofidèle. Il reste à voir que $- \circ F$ est stable sous monos scindés. Soit $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $H : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $\rho : GF \Rightarrow H$ et $\mu : H \Rightarrow GF$ tels que $\rho \circ \mu = 1_H$.

   Construisons un foncteur $G' : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{Y}$. Si $D \in \mathbf{D}$, l'essentielle surjectivité de F fournit $C_D \in \mathbf{C}$ et $\sigma_D : FC_D \longrightarrow D$ inversible ; posons alors $G'D = HC_D$. Si $f : D \longrightarrow D'$, considérons le morphisme

$$FC_D \xrightarrow{\sigma_D} D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{\sigma_{D'}^{-1}} FC_{D'}. \tag{6.5}$$

   Comme F est plein, il existe $g_f : C_D \longrightarrow C_{D'}$ tel que Fg_f est égal à 6.5. Posons alors $G'f = Hg_f$.

   Voyons que G' est un foncteur. Si $D \in \mathbf{D}$, $G'1_D = 1_{G'D}$, car $Fg_{1_D} = 1_{FC_D}$ (ici nous utilisons la partie de l'essentielle surjectivité qui n'est pas dans la semi-essentielle) et donc le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
HC_D \arrow[r, "\mu_{C_D}"'] \arrow[rr, bend left, "1_{HC_D}"] \arrow[d, "1_{HC_D}"'] & GFC_D \arrow[r, "\rho_{C_D}"'] \arrow[d, "1_{GFC_D}=GFg_{1_D}"] & HC_D \arrow[d, "Hg_{1_D}=G'1_D"] \\
HC_D \arrow[r, "\mu_{C_D}"] \arrow[rr, bend right, "1_{HC_D}"'] & GFC_D \arrow[r, "\rho_{C_D}"] & HC_D
\end{tikzcd} \tag{6.6}$$

Si $f : D \longrightarrow D'$ et $f' : D' \longrightarrow D''$, $G'(f'f) = G'(f') \circ G'(f)$ car le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
HC_D \arrow[r, "\mu_{C_D}"'] \arrow[rr, bend left, "1_{HC_D}"] \arrow[d, "G'f=Hg_f"'] & GFC_D \arrow[r, "\rho_{C_D}"'] \arrow[d, "GFg_f"] \arrow[dd, bend left, "GFg_{f'f}"] & HC_D \arrow[dd, bend left, "Hg_{f'f}=G'(f'f)"] \\
HC_{D'} \arrow[r, "\mu_{C_{D'}}"] \arrow[d, "G'f'=Hg_{f'}"'] & GFC_{D'} \arrow[d, "GFg_{f'}"] & \\
HC_{D''} \arrow[r, "\mu_{C_{D''}}"] \arrow[rr, bend right, "1_{HC_{D''}}"'] & GFC_{D''} \arrow[r, "\rho_{C_{D''}}"] & HC_{D''}
\end{tikzcd} \tag{6.7}$$

Il reste à vérifier que $G'F \cong H$. Pour cela, si $C \in \mathbf{C}$, posons $\omega_C =$

$$G'FC = HC_{FC} \xrightarrow{\mu_{C_{FC}}} GFC_{FC} \xrightarrow{G\sigma_{FC}} GFC \xrightarrow{\rho_C} HC \tag{6.8}$$

et $\omega_C^{-1} =$

$$HC \xrightarrow{\mu_C} GFC \xrightarrow{G\sigma_{FC}^{-1}} GFC_{FC} \xrightarrow{\rho_{C_{FC}}} HC_{FC} = G'FC. \tag{6.9}$$

ω est naturelle car si $f : C \longrightarrow C'$, le diagramme suivant commute (le carré central par définition de g_{Ff}).

$$\begin{tikzcd}
G'FC = HC_{FC} \arrow[r, "\mu_{C_{FC}}"] \arrow[d, "G'Ff=Hg_{Ff}"'] & GFC_{FC} \arrow[r, "G\sigma_{FC}"] \arrow[d, "GFg_{Ff}"'] & GFC \arrow[r, "\rho_C"] \arrow[d, "GFf"] & HC \arrow[d, "Hf"] \\
G'FC' = HC_{FC'} \arrow[r, "\mu_{C_{FC'}}"] & GFC_{FC'} \arrow[r, "G\sigma_{FC'}"] & GFC' \arrow[r, "\rho'_C"] & HC'
\end{tikzcd} \tag{6.10}$$

ω et ω^{-1} sont inverses l'un de l'autre. En effet, si $C \in \mathbf{C}$, par plénitude de F, il existe $\tau_C : C_{FC} \longrightarrow C$ tel que $F\tau_C = \sigma_{FC}$. Alors $\omega_C^{-1} \circ \omega_C = 1_{HC_{FC}}$, ce que montre la commutativité du diagramme suivant (remarquons l'utilisation du fait que $\sigma_{FC}^{-1} \circ \sigma_{FC} = 1_{GFC_{FC}}$, qui nécessite l'entière essentielle surjectivité).

$$\begin{tikzcd}
HC_{FC} \arrow[r, "\mu_{C_{FC}}"] \arrow[dr, "1_{HC_{FC}}"'] \arrow[ddd, "1_{HC_{FC}}"'] & GFC_{FC} \arrow[r, "G\sigma_{FC}=GF\tau_C"] \arrow[d, "\rho_{C_{FC}}"] & GFC \arrow[d, "\rho_C"] \\
 & HC_{FC} \arrow[r, "H\tau_C"] \arrow[d, "\mu_{C_{FC}}"] \arrow[ddl, "1_{HC_{FC}}"'] & HC \arrow[d, "\mu_C"] \\
 & GFC_{FC} \arrow[r, "G\sigma_{FC}=GF\tau_C"] \arrow[d, "1_{GFC_{FC}}"'] & GC \arrow[dl, "G\sigma_{FC}^{-1}"] \\
HC_{FC} & GFC_{FC} \arrow[l, "\rho_{C_{FC}}"] &
\end{tikzcd} \tag{6.11}$$

L'autre égalité ($\omega_C \circ \omega_C^{-1} = 1_{HC}$) s'obtient par un diagramme semblable.

7. Soit $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ deux catégories, $G, G' : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{C}$, $H, H' : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{Y}$ des foncteurs, et $\alpha : FG \Rightarrow FG'$ et $\beta : HF \Rightarrow H'F$ des transformations naturelles. Il faut prouver que $(H' * \alpha)(\beta * G) = (\beta * G')(H * \alpha)$, c'est-à-dire, si $X \in \mathbf{X}$, $H'\alpha_X \circ \beta_{GX} = \beta_{G'X} \circ H\alpha_X$:

$$\begin{tikzcd}
HFGX \arrow[r, "\beta_{GX}"] \arrow[d, "H\alpha_X"'] & H'FGX \arrow[d, "H'\alpha_X"] \\
HFG'X \arrow[r, "\beta_{G'X}"'] & H'FG'X.
\end{tikzcd} \tag{6.12}$$

Comme F est plein, il existe $f : GX \longrightarrow G'X$ tel que $Ff = \alpha_X$. Dès lors le diagramme 6.12 devient

$$\begin{tikzcd}
HFGX \arrow[r, "\beta_{GX}"] \arrow[d, "HFf"'] & H'FGX \arrow[d, "H'Ff"] \\
HFG'X \arrow[r, "\beta_{G'X}"'] & H'FG'X.
\end{tikzcd} \tag{6.13}$$

et commute par naturalité de $\beta : HF \Rightarrow H'F$. □

6.3 Premier système de factorisation sur Cat

Définition 6.5. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \{\text{foncteurs pleins et essentiellement surjectifs}\}; \\ \mathcal{M}_1 &= \{\text{foncteurs fidèles}\}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Comment factoriser un foncteur ? Soit $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$. $\mathrm{Im}_1 F$ est la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathbf{C}$ et si $C, C' \in \mathbf{C}$,

$$\mathrm{Im}_1 F(C, C') = F_{C,C'}(\mathbf{C}(C, C')). \tag{6.15}$$

La composition est celle de $\mathbf{D}$. Nous avons un foncteur plein et essentiellement surjectif $E^1_F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathrm{Im}_1 F$ qui envoie C sur C et $f : C \longrightarrow C'$ sur Ff ; nous avons aussi un foncteur fidèle $M^1_F : \mathrm{Im}_1 F \longrightarrow \mathbf{D}$ qui envoie C sur FC et $g : FC \longrightarrow FC'$ sur g. Alors $F = M^1_F \circ E^1_F$

Proposition 6.6. $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}_1)$ *est un pseudo-système de factorisation fidèle et plein à gauche.*

Preuve. $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{M}_1$ sont évidemment stables sous composition et sous transformations naturelles inversibles. Il faut voir que les foncteurs pleins et essentiellement surjectifs sont orthogonaux par rapport aux foncteurs fidèles. La démonstration de cela est analogue à celle de la proposition 6.8, dans la section suivante. Ce pseudo-système de factorisation est fidèle et plein à gauche, par la proposition 6.4. □

6.4 Deuxième système de factorisation sur Cat

Définition 6.7. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \{\text{foncteurs essentiellement surjectifs}\}; \\ \mathcal{M}_2 &= \{\text{foncteurs pleins et fidèles}\}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Soit $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$. $\mathrm{Im}_2 F$ est la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathbf{C}$ et si $C, C' \in \mathbf{C}$,

$$\mathrm{Im}_2 F(C, C') = \mathbf{D}(FC, FC'). \tag{6.17}$$

La composition est celle de $\mathbf{D}$. Nous avons un foncteur essentiellement surjectif $E^2_F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathrm{Im}_2 F$ qui envoie C sur C et $f : C \longrightarrow C'$ sur Ff, et un foncteur plein et fidèle $M^2_F : \mathrm{Im}_2 F \longrightarrow \mathbf{D}$ qui envoie C sur FC et $g : FC \longrightarrow FC'$ sur g. F est ainsi factorisée en $F = M^2_F \circ E^2_F$.

Proposition 6.8. $(\mathcal{E}_2, \mathcal{M}_2)$ *est un pseudo-système de factorisation fidèle et plein à droite.*

Preuve. $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{M}_2$ sont évidemment fermés sous composition et stables sous transformations naturelles inversibles. Pour voir que si $E : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ est essentiellement surjectif et $M : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est plein et fidèle, alors $E \downarrow M$, utilisons la propriété 2. de la définition 3.4.

1. Soit $U : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ et $V : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{D}$ des foncteurs, et $\varphi : VE \Rightarrow MU$ une transformation naturelle inversible. Définissons un foncteur $T : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$.

   Comme E est essentiellement surjectif, si $B \in \mathbf{B}$, il existe $E'B \in \mathbf{A}$ et $\eta_B : B \longrightarrow EE'B$ inversible. Posons $TB = UE'B$. Si $f : B \longrightarrow B'$ dans $\mathbf{B}$, considérons la flèche $\tilde{f} =$

$$MUE'B \xrightarrow{\varphi^{-1}_{E'B}} VEE'B \xrightarrow{V\eta^{-1}_B} VB \xrightarrow{Vf} VEE'B' \xrightarrow{\varphi_{E'B'}} MUE'B'. \tag{6.18}$$

   Comme M est plein, il existe $T(f) : TB = UE'B \longrightarrow UE'B' = TB'$ dans $\mathbf{C}$ tel que $MTf = \tilde{f}$. En utilisant la fidélité de M, il est facile de vérifier que T est un foncteur.

   Pour obtenir un remplissage (α, T, β) de (U, φ, V), il reste à définir les transformations naturelles inversibles $\alpha : TE \Rightarrow U$ et $\beta : MT \Rightarrow V$. Si $A \in \mathbf{A}$, considérons la flèche $\chi_A =$

$$MUE'EA \xrightarrow{\varphi^{-1}_{E'EA}} VEE'EA \xrightarrow{V\eta^{-1}_{EA}} VEA \xrightarrow{\varphi_A} MUA. \tag{6.19}$$

   Comme M est plein, il existe $\alpha_A : TEA = UE'EA \longrightarrow UA$ telle que $M\alpha_A = \chi_A$. Il est facile de voir que α est naturelle par la fidélité de M. Si $B \in \mathbf{B}$, posons $\beta_B =$

$$MTB = MUE'B \xrightarrow{\varphi^{-1}_{E'B}} VEE'B \xrightarrow{V\eta^{-1}_B} VB. \tag{6.20}$$

2. Maintenant, si $U_0, U_1 : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ et $V_0, V_1 : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{D}$ sont des foncteurs, $\varphi_0 : V_0E \Rightarrow MU_0$ et $\varphi_1 : V_1E \Rightarrow MU_1$ des transformations naturelles inversibles, si (α_0, T_0, β_0) et (α_1, T_1, β_1) sont des remplissages de (U_0, φ_0, V_0) et (U_1, φ_1, V_1), et si (μ, ν) est une 2-flèche de (U_0, φ_0, V_0) vers (U_1, φ_1, V_1), nous devons définir une transformation naturelle $\tau : T_0 \Rightarrow T_1$.

   Si $B \in \mathbf{B}$, considérons $\sigma = \beta_1^{-1} \circ \nu \circ \beta_0 : MT_0 \Rightarrow MT_1$. Comme M est plein et fidèle, par le point 2. de la proposition 6.4, $M \circ -$ est plein et fidèle et il existe une unique transformation naturelle $\tau : T_0 \Rightarrow T_1$ telle que $M * \tau = \sigma$. Pour vérifier que $\alpha_1(\tau * E) = \mu\alpha_0$ il suffit d'utiliser la fidélité de $M \circ -$, tandis que $\beta_1(M * \tau) = \nu\beta_0$ est immédiat par définition de τ.

Ce pseudo-système de factorisation est fidèle et plein à droite, par la proposition 6.4. □

6.5 Troisième système de factorisation sur Cat

Définition 6.9. Posons cette fois

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &= \{\text{foncteurs semi-essentiellement surjectifs}\}; \\ \mathcal{M}_3 &= \{\text{foncteurs pleins, fidèles et stables sous monos scindés}\}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Si $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, F se factorise à travers Im_3F, la catégorie dont les objets sont les triplets (D, C, m), où $D \in \mathbf{D}$, $C \in \mathbf{C}$ et $m : D \longrightarrow FC$ est un mono scindé, et si $(D, C, m), (D', C', m') \in \mathrm{Im}_3F$,

$$\mathrm{Im}_3F((D, C, m), (D', C', m')) = \mathbf{D}(D, D'). \tag{6.22}$$

$F = M^3_F \circ E^3_F$, où $E^3_F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathrm{Im}_3F$ envoie C sur $(FC, C, 1_{FC})$ et $f : C \longrightarrow C'$ sur Ff, tandis que $M^3_F : \mathrm{Im}_3F \longrightarrow \mathbf{D}$ envoie (D, C, m) sur D et $g : (D, C, m) \longrightarrow (D', C', m')$ sur g.

Proposition 6.10. *$(\mathcal{E}_3, \mathcal{M}_3)$ est un système de factorisation fidèle et plein à droite.*

Preuve.
1. Les équivalences sont évidemment dans $\mathcal{E}_3 \cap \mathcal{M}_3$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{E}_3$ est fermé sous composition, et donc sous composition avec équivalence. Voyons que $\mathcal{M}_3$ est fermé sous composition (alors $\mathcal{M}_3$ sera fermé sous composition avec équivalences).
   Soit $G : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ et $H : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$ deux foncteurs pleins fidèles et stables sous monos scindés. Bien sûr, HG est plein et fidèle. Voyons qu'il est aussi stable sous monos scindés. Soit $X \in \mathbf{X}$, $Z \in \mathbf{Z}$ et $m : Z \longrightarrow HGX$ mono scindé. Comme H est stable sous monos scindés, il existe $Y \in \mathbf{Y}$ et un iso $\sigma : HY \longrightarrow Z$. Alors $m \circ \sigma : HY \longrightarrow HGX$ est un mono scindé. Comme H est plein et fidèle, il existe $m' : Y \longrightarrow GX$ mono scindé, tel que $Hm' = m \circ \sigma$. La stabilité de G sous monos scindés implique alors l'existence de $X' \in \mathbf{X}$ et d'un iso $\tau : GX' \longrightarrow Y$. Alors $\sigma \circ H\tau$ est un iso de HGX' vers Z. HG est donc bien stable sous monos scindés.
2. Un foncteur $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ est factorisé comme indiqué dans la définition précédente. M^3_F est trivialement plein et fidèle. Il est aussi stable sous monos scindés, car si $(D, C, m) \in \mathrm{Im}_3F$ et $D' \in \mathbf{D}$, avec $i : D' \longrightarrow D$ mono scindé dans $\mathbf{D}$, alors $mi : D' \longrightarrow FC$ est un mono scindé (car composé de deux monos scindés), et donc $(D', C, mi) \in \mathrm{Im}_3F$ est tel que $M^3_F(D', C, mi) = D'$. De son côté, E^3_F est semi-essentiellement surjectif, car si $(D, C, m) \in \mathrm{Im}_3F$, alors $m : (D, C, m) \longrightarrow (FC, C, 1_{FC}) = E^3_F(C)$ est un mono scindé.
3. La démonstration de la propriété d'orthogonalité est tout à fait analogue à celle de la proposition 6.8.
4. Le système de factorisation est fidèle et plein à droite par la proposition 6.4. □

6.6 Remarques générales sur les systèmes de factorisation sur Cat

Contrairement à **CGS**, nous avons deux systèmes de factorisations fidèles et plein à droite. Il est possible de les distinguer en disant qu'un système de factorisation $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est *stable sous monos scindés à droite* si pour tout $m \in \mathcal{M}$, $m \circ -$ est stable sous monos scindés ; $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ est *stable sous monos scindés à gauche* si pour tout $e \in \mathcal{E}$, $- \circ e$ est stable sous monos scindés. Alors le premier système de factorisation est stable sous monos scindés à gauche par le point 6. de la proposition 6.4, tandis que le troisième est stable sous monos scindés à droite ; le deuxième n'est pas stable sous monos scindés à droite, car $M \circ -$ est plein, fidèle et stable sous monos scindés si et seulement si M l'est, par la proposition 6.4.

Pour terminer, donnons un exemple de système de factorisation plein et fidèle. Considérons la 2-catégorie $\mathbf{Cat}^{\mathrm{p}}$ des catégories, foncteurs pleins et transformations naturelles. Par la propriété 7. de la proposition 6.4, c'est une 2-catégorie prépleine, dans laquelle les deux premiers systèmes de factorisation décrits ci-dessus peuvent être construits (m_F^1 et e_F^2 sont pleins si F est plein) et coïncident.

Chapitre 7

Perspectives

Il existe une façon intéressante de définir la catégorie $\mathbf{C}^2$, si $\mathbf{C}$ est une catégorie. Cela vaut aussi pour les 2-catégories ; pour simplifier les écritures, je vais dans ce qui suit tout faire dans le cas des catégories ; pour les 2-catégories, il suffit de remplacer "catégorie" par "2-catégorie", **Ens** par **Cat**, "fonction" par "foncteur", ...

Les objets de $\mathbf{C}^2$ sont les flèches de $\mathbf{C}$. Si f, g sont des flèches de $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^2(f,g) \in \mathbf{Ens}$ est obtenu par le produit fibré suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^2(f,g) \arrow[r, "P^e_{fg}"] \arrow[d, "P^m_{fg}"'] & \mathbf{C}(C,D) \arrow[d, "\mathbf{C}(C,g)"] \\
\mathbf{C}(C',D') \arrow[r, "\mathbf{C}(f,D')"'] & \mathbf{C}(C,D')
\end{tikzcd} \tag{7.1}$$

Remarquons que par la proposition 2.2 (ou 3.5 pour les 2-catégories), $f \downarrow g$ si et seulement si la fonction $\Phi : \mathbf{C}(C',D) \longrightarrow \mathbf{C}^2(f,g)$, donnée par l'universalité du produit fibré appliquée au diagramme 2.2, est bijective. La composition de $\mathbf{C}^2(f,g)$ s'obtient par l'universalité du produit fibré.

Maintenant, si $(\mathcal{E}_i, \mathcal{M}_i)$ et $(\mathcal{E}_j, \mathcal{M}_j)$ sont deux systèmes de factorisation sur **Ens** (ou sur **Cat** pour les 2-catégories), et si $f, g \in \mathbf{C}^2$, définissons $\mathrm{Fr}^{ij}\mathbf{C}(f,g)$ en factorisant respectivement dans l'un et dans l'autre système les deux flèches $\mathbf{C}(C,g)$ et $\mathbf{C}(f,D')$ avant d'en calculer le produit fibré.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^2(f,g) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, dashed, "P^{ij}_{fg}"] & & \mathbf{C}(C,D) \arrow[d, "E^j(C,g)\in\mathcal{E}_j"] \arrow[dd, bend left, "\mathbf{C}(C,g)"] \\
& \mathrm{Fr}^{ij}\mathbf{C}(f,g) \arrow[r, "P^e_{fg}\in\mathcal{M}_i"] \arrow[d, "P^m_{fg}\in\mathcal{M}_j"'] & \mathbf{C}^j_g(C,D) \arrow[d, "\mathbf{C}^j(C,g)\in\mathcal{M}_j"] \\
\mathbf{C}(C',D') \arrow[r, "E^i(f,D')\in\mathcal{E}_i"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{C}(f,D')"'] & \mathbf{C}^i_f(C',D') \arrow[r, "\mathbf{C}^i(f,D')\in\mathcal{M}_i"] & \mathbf{C}(C,D')
\end{tikzcd} \tag{7.2}$$

Il se fait alors que dans tous les cas connus (et étudiés dans ce travail), dans les catégories ou les 2-catégories, $\mathrm{Fr}^{ij}\mathbf{C}(f,g)$ est (à iso ou équivalence près) l'ensemble ou la catégorie des flèches de f vers g dans la (2-)catégorie libre avec système de factorisation tel que pour tout $e \in \mathcal{E}$, $- \circ e \in \mathcal{M}_i$, et pour tout $m \in \mathcal{M}$, $m \circ - \in \mathcal{M}_j$. En particulier, dans les catégories, si nous notons $(\mathcal{E}_0 = \{\text{isos}\}, \mathcal{M}_0 = \{\text{fonctions quelconques}\})$ et $(\mathcal{E}_1 = \{\text{épis}\}, \mathcal{M}_1 = \{\text{monos}\})$, alors

$$\mathrm{Fr}^{00}\mathbf{C}(f,g) \cong \mathbf{C}^2(f,g); \tag{7.3}$$

$$\mathrm{Fr}^{11}\mathbf{C}(f,g) \cong \mathrm{Fr}\mathbf{C}(f,g). \tag{7.4}$$

Pour les 2-catégories, en suivant les numérotations des systèmes de factorisation sur **Cat** du chapitre précédent, et en appelant $(\mathcal{E}_0 = \{\text{ équivalences }\}, \mathcal{M}_0 = \{\text{ foncteurs quelconques }\})$, alors

$$\mathrm{Fr}^{00}\mathbf{C}(f,g) \cong \mathbf{C}^2(f,g); \tag{7.5}$$

$$\mathrm{Fr}^{11}\mathbf{C}(f,g) \cong \mathrm{Fr}\mathbf{C}(f,g); \tag{7.6}$$

$$\mathrm{Fr}^{21}\mathbf{C}(f,g) \cong \mathrm{Fr}^{\mathrm{e}}\mathbf{C}(f,g); \tag{7.7}$$

$$\mathrm{Fr}^{12}\mathbf{C}(f,g) \cong \mathrm{Fr}^{\mathrm{m}}\mathbf{C}(f,g); \tag{7.8}$$

$$\mathrm{Fr}^{22}\mathbf{C}(f,g) \cong \mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}(f,g). \tag{7.9}$$

Cela suggère la possibilité de définir de manière générale les (2-)catégories libres avec système de factorisation vérifiant des propriétés du type étudié ici et d'en étudier les propriétés une fois pour toute. Cela permettrait par exemple d'étudier les systèmes de factorisation fidèles et, à gauche ou à droite, pleins et stables sous monos scindés, dont l'intérêt est signalé dans la dernière section du chapitre précédent.

Le problème pour mener à bien ce projet est de définir la composition des 2-catégories $\mathrm{Fr}^{ij}\mathbf{C}$. Si je sais définir à la main les compositions pour celles que je connais (avec une restriction sur $\mathbf{C}$ pour $\mathrm{Fr}^{\mathrm{p}}\mathbf{C}$), je ne sais pas définir la composition de manière générale pour les $\mathrm{Fr}^{ij}\mathbf{C}$. La difficulté est peut-être liée au fait que dans certains cas comme $\mathrm{Fr}^{22}\mathbf{C}$, une condition sur $\mathbf{C}$ est nécessaire.

Cela suggère trois nouvelles étapes :

1. comprendre comment définir la composition des $\mathrm{Fr}^{ij}\mathbf{C}$;
2. étudier en général les $\mathrm{Fr}^{ij}\mathbf{C}$ en établissant la propriété universelle escomptée ;
3. établir tous les systèmes de factorisation sur **Cat** pour aboutir à une compréhension complète de la question.

Bibliographie

[Bor1] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra I*, Cambridge University Press, 1994.

[Bor2] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra II*, Cambridge University Press, 1994.

[Bou] A.K. Bousfield, *Constructions of factorization systems in categories*, J. Pure Appl. Algebra, **9**(1977), 207-220.

[CJKP] A. Carboni, G. Janelidze, G.M. Kelly et R. Paré, *On localization and stabilization for factorization systems*, Appl. Categorical Structures **5**(1997),1-58.

[CHK] C. Cassidy, M.Hébert et G.M. Kelly, *Reflective subcategories, localizations and factorization systems*, J. Ausral. Math. Soc. (Series A) **38**(1985), 287-329.

[GPS] R. Gordon, A.J. Power et R. Street, *Coherence of tricategories*, Memoirs of the AMS **117**(558)(1995).

[Gra] M. Grandis, *On the monad of proper factorization systems in categories*, prépublication, 2001.

[F-K] P.J. Freyd et G.M. Kelly, *Categories of continuous functors I*, J. Pure Appl. Algebra **2**(1972), 169-191.

[K-V] S. Kasangian et E.M. Vitale, *Factorization systems for symmetric cat-groups*, Theory and Applications of Categories **7**(5)(2000), 47-70.

[K-S] G.M. Kelly et R. Street, *Review of the elements of 2-categories*, Lecture Notes Math. **420**(1974), 75-103.

[K-T] M. Korostenski et W. Tholen, *Factorization systems as Eilenberg-Moore algebras*, J. Pure Appl. Algebra, **85**(1993), 57-72.

[Mar] F. Marmolejo, *Distributive laws for pseudomonads*, Theory and Applications of Categories **5**(5)(1999), 91-147.

[Mil] S. Milius, *Factorization systems in 2-categories*, prépublication, 2000.